π-Economy. 2023, Том 16, № 6. С. 155–166.
π-Economy. 2023, Vol. 16, No. 6. Pp. 155–166.

Научная статья
УДК 330.4.519.2
DOI: https://doi.org/10.18721/JE.16611

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ АВТОРЕГРЕССИИ В КРАТКОСРОЧНОМ ПРОГНОЗИРОВАНИИ ЦЕН

С.Г. Светуньков ✉ **, Е.С. Самарина**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

✉ sergey@svetunkov.ru

Аннотация. Для принятия эффективного экономического решения необходимо иметь представление о возможном состоянии в будущем объекта принятия решений и его окружения, получаемое с помощью прогнозирования. Чем точнее выполняются прогнозы, тем меньше неопределённости в ситуации принятия решений, и тем эффективнее принимаемые решения. Поэтому повышение точности экономического прогнозирования является важной научной задачей. Одним из новых направлений в экономическом прогнозировании является прогнозирование с помощью моделей векторных авторегрессий. Но практическое применение этих моделей затруднено, поскольку с ростом размерности вектора авторегрессии количество коэффициентов модели растёт нелинейно и возникают серьёзные вычислительные сложности при построении таких моделей. Нами предлагаются к использованию комплекснозначные векторные авторегрессии, которые проще векторных авторегрессий действительных переменных, поскольку содержат вдвое меньшее количество коэффициентов, значения которых следует оценить статистическими методами. На примере рынка мировых цен на цветные металлы нами был сформирован восьмимерный вектор цен на них – драгоценные и недрагоценные. На основе статистических данных этого вектора были построены две линейные векторные авторегрессии действительных и комплексных переменных, а также две нелинейные модели векторных авторегрессий действительных и комплексных переменных. Показано, что нелинейная комплекснозначная векторная авторегрессия является лучшей моделью из этих четырёх моделей как с позиций байесовского информационного критерия, так и с позиций точности краткосрочного экономического прогнозирования, что было проверено на последних статистических данных. Рекомендуется для краткосрочного экономического прогнозирования цен использовать нелинейные комплекснозначные авторегрессии. Возможность использования комплекснозначных векторных авторегрессий при краткосрочном прогнозировании других экономических показателей следует выяснять с помощью дополнительных исследований по методике, изложенной в статье. Доказательство эффективности использования комплекснозначных векторных авторегрессий в краткосрочном экономическом прогнозировании является основанием для построения в дальнейшем комплекснозначных моделей векторных авторегрессий размерности более 10, что чрезвычайно сложно или невозможно для векторных авторегрессий действительных переменных.

Ключевые слова: ESG краткосрочное прогнозирование, экономическое прогнозирование, векторные авторегрессии, комплекснозначные векторные авторегрессии, цены

Благодарности: Грант Российского научного фонда № 23-28-01213, https://rscf.ru/project/23-28-01213/ «Теория и методология краткосрочного экономического прогнозирования комплекснозначными векторными авторегрессиями».

Для цитирования: Светуньков С.Г., Самарина Е.С. (2023) Нелинейные векторные авторегрессии в краткосрочном прогнозировании цен. π-Economy, 16 (6), 155–166. DOI: https://doi.org/10.18721/JE.16611

Research article
DOI: https://doi.org/10.18721/JE.16611

NONLINEAR VECTOR AUTOREGRESSIONS IN SHORT-TERM METAL PRICE FORECASTING

S.G. Svetunkov ✉ , **E.S. Samarina**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

✉ sergey@svetunkov.ru

Abstract. In order to make an effective economic decision, it is necessary to have an idea of the possible future state of the decision-making object and its environment, which is obtained by means of forecasting. The more accurately forecasts are performed, the less uncertainty in the decision-making situation, and the more effective the decisions made. Therefore, improving the accuracy of economic forecasting is an important scientific task. One of the new directions in economic forecasting is forecasting with the help of vector autoregression models. But the practical application of these models is difficult, because with increasing dimensionality of the autoregression vector the number of model coefficients grows nonlinearly and there are serious computational difficulties in the construction of such models. We propose to use complex-valued vector autoregressions, which are simpler than vector autoregressions of real variables, because they contain half the number of coefficients, the values of which should be estimated by statistical methods. Using the example of the market of world prices for non-ferrous metals, we have formed an eight-dimensional vector of prices for non-ferrous metals, precious and non-precious. Two linear vector autoregressions of real and complex variables, as well as two nonlinear models of vector autoregressions of real and complex variables were constructed on the basis of statistical data of this vector. It is shown that the nonlinear complex-valued vector autoregression is the best model of these four models both from the positions of Bayesian information criterion and from the position of accuracy of short-term economic forecasting, which was verified using the latest statistics. It is recommended to use nonlinear complex-valued autoregressions for short-term economic forecasting of prices. The possibility of using complex-valued vector autoregressions in short-term forecasting of other economic indicators should be clarified through additional research using the methodology outlined in the article. Proving the effectiveness of using complex-valued vector autoregressions in short-term economic forecasting is the basis for further construction of complex-valued vector autoregression models of dimensions greater than 10, which is extremely difficult or impossible for vector autoregressions of real variables.

Keywords: short-term forecasting, economic forecasting, vector autoregressions, complex-valued vector autoregressions, prices

Acknowledgements: Grant of the Russian Science Foundation No. 23-28-01213, https://rscf.ru/project/23-28-01213/ "Theory and methodology of short-term economic forecasting using complex-valued vector autoregressions".

Citation: Svetunkov S.G., Samarina E.S. (2023) Nonlinear vector autoregressions in short-term metal price forecasting. π-Economy, 16 (6), 155–166. DOI: https://doi.org/10.18721/JE.16611

Введение

Объекты исследования естественно-научных дисциплин, несмотря на их очевидную сложность, обладают одним важным свойством для успешного моделирования – они развиваются как обратимые процессы. Это означает, что присущие этим объектам закономерности повторяются при одних и тех же условиях многократно, и при их тщательном исследовании эти закономерности приобретают форму законов, которым, чаще всего, удаётся придать математическую форму.

Экономика с этих позиций значительно труднее для исследований. Она не только сложна по своей структуре и наличию множества нелинейных взаимосвязей, распределённых во времени, но и развивается в условиях действия изменяющихся внешних факторов, адаптируясь к которым, она претерпевает необратимые изменения. Поэтому многие экономические закономерности, которые выявляют учёные в конкретно-исторические периоды, через некоторое время перестают наблюдаться, а те экономические законы, которые сформулировала экономическая наука, не приобретают математическую форму.

Сложность экономических систем побуждает учёных, исследующих их, совершенствовать инструменты изучения экономики, в том числе обращаясь к тем из них, которые используют другие науки.

Наиболее близко по задачам и особенностям исследования объектов естественно-научной природы в экономике стоят задачи краткосрочного прогнозирования. Это объясняется тем, что в краткосрочном периоде чаще всего сохраняется стационарность развития экономических систем и их показатели могут рассматриваться как реализация случайных стационарных процессов. Исходя из этой предпосылки, краткосрочное экономическое прогнозирование сегодня выполняется с помощью довольно обширного математического инструментария – от простых средних до комплекснозначных авторегрессий. Однако недостатком этих инструментов прогнозирования является то, что они все разработаны при предположении об автономном развитии прогнозируемого процесса, на который воздействуют случайные факторы.

В экономике не встречаются изолированные процессы. Любые экономические объекты формируются под воздействием разных факторов и при этом взаимодействуют с другими объектами, сами, в свою очередь, оказывая влияние на другие объекты. Эту особенность прогнозисты пытаются учесть, используя авторегрессии с распределёнными лагами, включая в модель краткосрочного прогнозирования какого-то показателя не только его предшествующие значения, но и значения других показателей. В этом направлении есть успешные практики, но широкого применения они не нашли.

Лучше всего сложную взаимосвязь между экономическими объектами, а, значит, и их показателями может промоделировать новый инструмент, находящий всё большее число сторонников среди учёных – векторные авторегрессии.

Эти модели начали наиболее активно использовать в краткосрочном прогнозировании климатических процессов и в медицине. Так в статье [7] учёные с помощью трёхмерной векторной авторегрессии осуществили краткосрочный прогноз эмиссии углекислого газа в Китае, а в [10] на основе четырёхмерной модели проведён анализ выбросов ряда вредных веществ в атмосферу. Результаты прогнозирования гидро-ветровых гибридных систем с помощью векторных авторегрессий описаны в [15].

COVID-19, эпидемия которого нарастала лавинообразно, вызвала к жизни ряд исследований по прогнозированию этой эпидемии, в том числе и с использованием векторных авторегрессий [9, 14]. Успех этих работ расширил сферу применения векторных авторегрессий в краткосрочном прогнозировании в медицине. Опубликованы результаты прогнозирования внутричерепного давление пациентов [16] и прогнозирования цереброваскулярной реактивности при черепно-мозговых травмах [13].

Успешное применение векторных авторегрессий в различных исследованиях породило повышенный интерес к этому инструменту и для решения различных задач в экономике, в первую очередь для решения задач краткосрочного прогнозирования [8]. Но при этом публикации по краткосрочному экономическому прогнозированию относительно малы. Тем не менее, сегодня в краткосрочном экономическом прогнозировании использование векторных авторегрессий является своеобразным «мейнстримом» как в зарубежных экономических исследованиях [11, 12], так и в отечественных.

При этом практически во всех опубликованных работах, в которых использовались векторные авторегрессии, размерность векторов не превышает шести, а сами модели являются линейными. Это обусловлено тем, что векторные авторегрессии являются сложными для построения из-за большой размерности матриц коэффициентов и сложности вычисления их значений.

В данном исследовании мы ставили перед собой цель обосновать метод построения векторных авторегрессий в комплекснозначной форме как альтернативу векторным авторегрессиям действительных переменных и продемонстрировать возможность построения нелинейных векторных авторегрессий. Для этого были сформулированы задачи оценки метода снижения размерности с применением комплекснозначной формы векторной авторегрессии и проверки возможности построения нелинейных векторных авторегрессий, которая пока что не была изучена другими учёными.

Методы и материалы

Векторная авторегрессия порядка p VAR (p) будет записана в таком виде:

$$\hat{Y}_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \ldots + A_p Y_p, \tag{1}$$

где Y_t – k-мерный вектор переменных; A_0 – k-мерный вектор свободных коэффициентов; A_τ – k x k-мерные постоянные вещественные матрицы коэффициентов.

Например, двумерная VAR (1) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1(t-1)} \\ y_{2(t-1)} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В трехмерном случае VAR (1) будет записана так:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1(t-1)} \\ y_{2(t-1)} \\ y_{3(t-1)} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для четырехмерного случая VAR (1) будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \\ \hat{y}_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1(t-1)} \\ y_{2(t-1)} \\ y_{3(t-1)} \\ y_{4(t-1)} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Из (2–4) можно заметить, что количество коэффициентов векторной авторегрессии будет равно k^2p, где k – размер вектора, а p – порядок авторегрессии. Так, для двумерной модели VAR(1) необходимо оценить 4 коэффициента, для трёхмерной – 9 коэффициентов, для четырёхмерной – 16 коэффициентов, а для VAR(4) при $k = 6$ необходимо оценить уже 114 коэффициентов. Сложность моделей авторегрессии AR(p) зависит от порядка лага p, в то время как сложность векторной авторегрессии преимущественно зависит от размера вектора k.

Становится очевидным, что применение моделей простой векторной авторегрессии на практике является трудоёмкой задачей – ключевая проблема, с которой связано такое ограниченное использование моделей векторной авторегрессии, состоит в нелинейном росте сложности задачи с ростом размерности вектора и порядка авторегрессии. Поэтому в современной прогностической практике в основном используют модели VAR(p) до второго порядка и размерностью не более четырёх. Например, В.В. Хабров [5] использовал для прогнозирования портфеля инвестиций трёхмерный вектор; А.В. Зубарев и М.А. Кириллова [1] – несколько двух- и трёхмерных векторов; О.Н. Салманов, В.М. Заернюк и О.А. Лопатина [3] – пятимерный вектор переменных и т.п. В этом ряду особняком стоит исследование Zhang Yi, Cheng Chuntian, Rui Cao, Gang Li, Jianjian Shen и Xinyu Wu [15], которые построили векторную авторегрессии, используя одиннадцатимерный вектор, то есть – VAR(11). Для этого им было необходимо было оценить значение 121 коэффициента модели, что представляет собой отдельную и непростую задачу.

Для того, чтобы преодолеть «проклятие размерности» следует обратиться к комплекснозначной форме векторной авторегрессии так, как это сделано в [4]. Для чётного числа составляющих вектора эта комплекснозначная векторная авторегрессия CVAR(p) содержит в два раза меньшее количество коэффициентов, чем модель VAR(p) с действительными переменными, например, VAR(10) содержит 100 неизвестных коэффициентов, а CVAR(10) – 50 неизвестных коэффициентов. Как это происходит?

Комплексное число представляет собой числовую пару, состоящую из вещественной и мнимой частей:

$$Z = x + iy, \tag{5}$$

где x – вещественная часть комплексного числа; y – мнимая часть комплексного числа; i – мнимая единица, равная $\sqrt{1}$.

Выполняя действия с одним комплексным числом, учёный на самом деле работает одновременно с двумя вещественными числами, что и обуславливает широкое применение комплексных переменных и их функций в естественно-научных и инженерных сферах деятельности человека – модели комплексных переменных можно рассматривать как удобную форму и относительно простую форму представления очень сложных нелинейных взаимосвязей.

Применительно к моделям векторных авторегрессий модель CVAR(1) будет представлена в такой форме:

$$\hat{y}_{1t} + i\hat{y}_{2t} = \left(b_0 + ib_1\right) + \left(a_0 + ia_1\right)\left(y_{1(t-1)} + iy_{2(t-1)}\right), \tag{6}$$

где b_0 и b_1 – коэффициенты комплексного свободного члена, отражающие начальное значение комплексного вектора.

От свободных членов b_0 и b_1 можно легко избавиться, осуществив центрирование исходных переменных относительно их средних арифметических. Обычно при построении векторных авторегрессий так и поступают. Тогда, можно принять, что коэффициенты b_0 и b_1 равны нулю.

В этом случае модель комплекснозначной векторной авторегрессии первого порядка CVAR (1) будет представлена так:

$$\hat{y}_{1t} + i\hat{y}_{2t} = \left(a_0 + ia_1\right)\left(y_{1(t-1)} + iy_{2(t-1)}\right). \tag{7}$$

Если отдельно сгруппировать действительную и мнимую части, то модель может быть представлена в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1(t-1)} \\ y_{2(t-1)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В трёхмерном случае CVAR(1) в векторной форме будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1(t-1)} \\ y_{2(t-1)} \\ y_{3(t-1)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В четырёхмерном случае CVAR(1) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \\ \hat{y}_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} & -a_{14} \\ a_{12} & a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & -a_{24} \\ a_{22} & a_{21} & a_{24} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1(t-1)} \\ y_{2(t-1)} \\ y_{3(t-1)} \\ y_{4(t-1)} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Как можно увидеть из (7–9) для модели CVAR(1) при $k = 1$ необходимо оценить уже не 4 коэффициента, как в случае с VAR(1), а только 2 коэффициента; в трёхмерном случае для $\text{CVAR}^3(1)$ необходимо оценить 7 коэффициентов, тогда как для $\text{VAR}^3(1)$ нужно оценить 9; в четырёхмерном случае для $\text{CAR}^4(1)$ следует найти значения 8 неизвестных коэффициентов, в то время, как для $\text{VAR}^4(1)$ необходимо оценить в два раза большее количество коэффициентов – 16.

Таким образом, видно явное преимущество моделей комплекснозначной векторной авторегрессии перед моделями векторной авторегрессии действительных переменных с позиций борьбы с «проклятием размерности». Но уменьшение числа оцениваемых коэффициентов приводит к некоторому ухудшению аппроксимационных свойств модели, что является очевидным – чем сложнее модель, тем точнее она учитывает детали. Поэтому следует посмотреть: не приводит ли упрощение модели VAR(p) за счёт её трансформации в CVAR(p) к ухудшению её прогнозных свойств?

Для ответа на этот вопрос нами были взяты котировки металлов на бирже «London Metals Exchange» за период 2013–2023 гг. Всего в выборку попало 121 наблюдение – ежемесячные цены на металлы с 31.07.2013 по 31.09.2023. Выборка была разделена на обучающее множество (120 наблюдений за 2013–2023 гг.) и проверочное множество (наблюдения за июль, август и сентябрь 2023 г.).

Из всей совокупности цен на металлы, которые котируются на этой бирже, нами были выбраны восемь основных, а именно: золото y_1, серебро y_2, платина y_3 и палладий y_4, и недрагоценные металлы никель y_5, цинк y_6, медь y_7 и кобальт y_8. Из этих показателей был сформирован восьмимерный вектор, который использовался для построения векторной авторегрессии.

Поскольку цены на выбранные металлы отличаются друг от друга по единице измерения и по масштабу, то все собранные данные были стандартизированы приведением их к безразмерным величинам.

Векторные авторегрессии по определению представляют собой линейную форму взаимосвязи. Но в экономике линейные взаимосвязи встречаются довольно редко и только в малый промежуток времени относительной стабильности. Поэтому помимо линейных моделей $\text{VAR}^8(p)$ и $\text{CVAR}^8(p)$ следует рассмотреть возможность использования нелинейных моделей.

Корреляционный анализ исходных рядов показал, что между некоторыми переменными имеется обратная нелинейная взаимосвязь. Так, ряд y_4 (палладий) имеет противоположную (обратную) другим рядам динамику, носящую нелинейный характер. Поэтому в модели векторной регрессии данный ряд был представлен обратной функцией как y_4^{-1}. Ряды y_5 (никель) и y_8 (кобальт) имеют непропорционально большую амплитуду колебаний значений, вызванную, в том числе, и влиянием случайных факторов. Это влияние является положительным и нелинейным. Для того, чтобы сгладить влияние этой высокой волатильности и учесть нелинейность влияния этих показателей на другие, в модели был использован десятичный логарифм этих двух рядов.

Таким образом, помимо моделей VAR^8(p) и CVAR^8(p) нами рассматривались нелинейные модели векторной авторегрессии действительных переменных NVAR^8(p) и нелинейной комплекснозначной векторной авторегрессии NCAR^8(p).

Для того, чтобы выбрать оптимальный порядок векторной авторегрессии p используют один из информационных критериев, чаще всего, Байесовский информационный критерий:

$$BIC = \ln \sigma^2 + m\frac{\ln N}{N}, \tag{11}$$

где N – число наблюдений, а m – количество коэффициентов модели.

Обычно, последовательно увеличивая сложность модели, высчитывают значение BIC для каждой из них и выбирают ту модель, для которой значение критерия минимально. Тем самым исследователь ищет компромисс между желанием построить наиболее точную в прошлом модель (минимум логарифма дисперсии σ^2) и желанием построить как можно более простую модель (минимум второго слагаемого (11), в котором решающую роль играет количество коэффициентов модели m). Количество коэффициентов m увеличивается с увеличением сложности модели так как это было показано ранее: $m = k^2p$.

Результаты и обсуждение

Для рассматриваемого случая оптимальными по критерию (11) являются модели первого порядка, когда $p = 1$. Это объясняется тем, что, например, модель VAR^8(1) состоит из 64 неизвестных коэффициентов, то есть $m = 64$, а модель VAR^8(2) содержит уже $m = 128$ неизвестных коэффициентов, что, при подстановке в (11) приводит к увеличению BIC и тогда модель первого порядка $p = 1$ по этому критерию является предпочтительнее.

Таким образом в нашем исследовании использованы четыре модели: VAR^8(1), CVAR^8(1), NVAR^8(1) и NCVAR^8(1).

Если для выбора лучшей прогнозной модели использовать, как это принято, информационный критерий (11), то комплекснозначные векторные авторегрессии – линейная и нелинейная, – вне конкуренции (табл. 1).

Таблица 1. Статистические характеристики аппроксимаций обучающего множества моделей VAR^8(1) и CVAR^8(1)
Table 1. Statistical characteristics of the training set approximations of the VAR^8(1) and CVAR^8(1) models

	BIC	σ	σ²
VAR^8(1)	–0,3960	0,2269	0,0515
CVAR^8(1)	–1,6632	0,2290	0,0524
NVAR^8(1)	–0,7688	0,18833	0,03547
NCVAR^8(1)	**–2,0542**	0,18831	0,03546

Причём минимальное значение BIC принимает для нелинейной комплекснозначной векторной авторегрессии NCVAR^8(1), равное (–2,0542). Следующей по этому критерию идёт комплексная линейная векторная авторегрессия CVAR^8(1) с BIC = –1,6632.

Но наша задача заключается не в том, чтобы показать преимущества по информационным критериям комплексных векторных авторегрессий по сравнению с векторными авторегрессиями действительных переменных. Это уже сделано в [4]. Наша задача заключается в выборе действительно лучшей прогнозной модели, а информационные критерии здесь не всегда точны. Поэтому мы воспользовались наличием проверочного множества данных за последние три месяца – июль, август и сентябрь.

Оценив коэффициенты всех четырёх видом моделей векторных авторегрессий на обучающем множестве, мы теперь проверим то, как эти модели с найденными коэффициентами выполняют прогнозы на месяц вперёд и сравним расчётные значения с фактическими значениями.

В табл. 2 приведены результаты этой процедуры. И здесь ситуация оказалась не столь однозначной, как это было с выбором моделей по информационному критерию.

Цены за июль точнее всех спрогнозировала нелинейная модель действительных переменных $NVAR^8(1)$; августовские цены точнее всего предсказала нелинейная комплекснозначная модель $NCVAR^8(1)$; сентябрьские цены точнее всего спрогнозировала простая векторная авторегрессия $VAR^8(1)$.

Таблица 2. Результаты прогнозирования векторными авторегрессиями данных проверочного множества
Table 2. Results of forecasting by vector autoregressions of test set data

Показатель точности прогноза	Вид модели			
	$VAR^8(1)$	**$CVAR^8(1)$**	**$NVAR^8(1)$**	**$NCVAR^8(1)$**
июль				
средняя ошибка	6,22%	5,83%	**2,16%**	3,58%
август				
средняя ошибка	5,77%	5,97%	5,13%	**4,11%**
сентябрь				
средняя ошибка	**2,51%**	3,20%	3,58%	2,65%
Среднее значение ошибки трёх прогнозов	4,83%	5,00%	3,62%	**3,45%**

Поэтому для выбора модели прогнозирования мировых цен на цветные металлы с помощью векторных авторегрессий необходимо вычислить среднюю ошибку прогнозирования. И здесь мы видим, что комплекснозначная нелинейная модель $NCVAR^8(1)$ имеет наименьшую среднюю ошибку прогноза, равную 3,45%.

Заключение

Таким образом в результате исследования были получены следующие научные результаты:

1. Эффективным методом, позволяющим существенно уменьшить вычислительные сложности, возникающие при построении векторных авторегрессий больших размерностей, является использование комплекснозначных векторных авторегрессии. При этом, как показано в статье, количество оцениваемых коэффициентов существенно сокращается, например, для векторов чётной размерности – в два раза.

2. Существенное уменьшение количества оцениваемых коэффициентов комплекснозначных авторегрессий не приводит при этом к ухудшению прогнозных свойств подобных моделей по сравнению с моделями действительных переменных, а в некоторых случаях приводит даже к повышению точности краткосрочных экономических прогнозов.

3. Поскольку количество оцениваемых коэффициентов с помощью перевода векторных авторегрессий в комплекснозначную форму существенно снижается, это приводит к тому, что информационные критерии практически всегда будут отдавать предпочтение комплексным векторным авторегрессиям по сравнению с векторными авторегрессиями действительных переменных.

4 Точность краткосрочного экономического прогнозирования с помощью векторных авторегрессий может быть повышена введением в модель нелинейности.

5. Сравнительный анализ использования различных векторных авторегрессий при краткосрочном прогнозировании мировых цен на металлы, показал, что комплекснозначная нелинейная модель $NCVAR^8(1)$ прогнозирует цены точнее, чем все другие модели. А поскольку и по байесовскому информационному критерию эта модель оказалась лучшей моделью, то можно сделать вывод о том, что комплексная форма векторных авторегрессий является наиболее эффективной при построении векторов больших размеров, с помощью которых выполняются краткосрочные прогнозы.

Направления дальнейших исследований

Мы построили модели восьмимерных векторных авторегрессий первого порядка. Комплекснозначная форма нелинейной векторной авторегрессии оказалась предпочтительнее, и мы её рекомендуем к использованию в практике краткосрочного экономического прогнозирования сложных процессов. Далее предстоит решить другую задачу – найти доступный метод построения векторных авторегрессий $NCVAR^k(p)$ большой размерности k с лагами $p > 1$. Сегодня такие задачи решаются только на моделях малой размерности $k < 6$ последовательным увеличением порядка авторегрессии p и вычислением информационных критериев для построенных моделей, отдавая предпочтение тем из них, у которых информационный критерий минимален.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Зубарев А.В., Кириллова М.А. (2023) Построение модели GVAR для российской экономики. *Экономический журнал Высшей школы экономики*, 1, 9–32.

2. Малов Д.Н. (2019) Оценка инвестиционной привлекательности компаний на основе модели VaR (векторной авторегрессии) и ARIMA с учетом рисков. *Инновации и инвестиции*, 1, 152–159.

3. Салманов О.Н., Заернюк В.М., Лопатина О.А. (2016) Установление влияния денежно-кредитной политики методом векторной авторегрессии. *Финансы и кредит*, 28, 2–17.

4. Светуньков С.Г., Баженова М.П., Лукаш Е.В. (2022) Перспективы использования векторных авторегрессий в экономическом прогнозировании. *Современная экономика: проблемы и решения*, 6 (150), 44–57. DOI: https://doi.org/10.17308/meps/2078-9017/2022/6/44-57

5. Хабров В.В. (2012) Оптимизация управления инвестиционным портфелем на основе моделей векторных авторегрессий и моделей многомерной волатильности. *Прикладная эконометрика*, 4 (28), 35–62.

6. Шимановский Д.В., Третьякова Е.А. (2020) Моделирование социо-эколого-экономических взаимосвязей как способ оценки устойчивого развития регионов РФ. *Вестник Пермского университета. Серия: Экономика*, 3 (15), 369–384. DOI: https://doi.org/10.17072/1994-9960-2020-3-369-384

7. Bin Xu, Boqiang Lin. (2016) What cause a surge in China's CO2 emissions? A dynamic vector autoregression analysis. *Journal of Cleaner Production*, 143, 17–26. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2016.12.159

8. Carolyn N. N., Sherris M. (2020) Modeling mortality with a Bayesian vector autoregression. *Mathematics and Economics* 94, 40–57. DOI: https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.05.011

9. Meimela A., Lestari S.S., Mahdy I.F., Toharudin T., Ruchjana B.N. (2021) Modeling of Covid-19 in Indonesia using vector autoregressive integrated moving average. *Journal of Physics: Conference Series*, 55–79. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1722/1/012079

10. Olson D.A., Riedel T.P., Long R., Offenberg J.H, Lewandowski M., Kleindienst T.E. (2019) Time series analysis of wintertime O3 and NOx formation using vector autoregressions. *Atmospheric Environment*, 218–232. DOI: https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2019.116988

11. Rabeh Khalfaoui, Shawkat Hammoudeh, Mohd Ziaur Rehman (2023) Spillovers and connectedness among BRICS stock markets, cryptocurrencies, and uncertainty: Evidence from the quantile vector autoregression network. *Emerging Markets Review*, 54, 101002, 16–27. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ememar.2023.101002

12. Shengfeng Li, Hafiz Hoque, Jacco Thijssen (2021) Firm financial behaviour dynamics and interactions: A structural vector autoregression approach. *Journal of Corporate Finance*, 69, 102028, 53. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcorpfin.2021.102028

13. Thelin E.P., Raj R., Bellander B., Nelson D., Piippo-Karjalainen A., Siironen J., Tanskanen P., Hawrylu G., Hasen M., Unger B., Zeiler F.A. (2020) Comparison of high versus low frequency cerebral physiology for cerebrovascular reactivity assessment in traumatic brain injury: a multi-center pilot study. *Journal of clinical monitoring and computing*, 34 (5), 971–994. DOI: https://doi.org/10.1007/s10877-019-00392-y

14. Wai-Sum Chan, Johnny Siu-Hang Li, Jackie Li. (2014) The CBD Mortality Indexes: Modeling and Applications. *North American Actuarial Journal*, 18 (1), 38–58.

15. Zhang Yi, Cheng Chuntian, Rui Cao, Gang Li, Jianjian Shen, Xinyu Wu (2021) Multivariate probabilistic forecasting and its performance's impacts on long-term dispatch of hydro-wind hybrid systems. *Applied Energy*, 283, 116–243. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.116243

16. Zeiler F. A., Ercole A., Cabeleira M. et al. (2020) Evaluation of the relationship between slow-waves of intracranial pressure, mean arterial pressure and brain tissue oxygen in TBI: a CENTER-TBI exploratory analysis. *Journal of Clinical Monitoring and Computing*, 781–799. DOI: https://doi.org/10.1007/s10877-020-00527-6

17. Brown R.G. (1956) *Exponential Smoothing for Predicting Demand*. Cambridge, Massachusetts: Arthur D. Little Inc.

18. Holt C.C. (1957) *Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Averages*. Pittsburgh, Pennsilvania: Carnegie Institute of Technology. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2003.09.015

19. Lütkepohl H. (2005) *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 764. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-27752-1

20. Neusser K. (2018) *Time Series Econometrics*. Springer International Publishing, 409. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-32862-1

21. Sims C. (1980) Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48 (1), 1–48. DOI:https://doi.org/10.2307/1912017

22. Svetunkov S. (2012) *Complex-Valued Modeling in Economy and Finance*. NY: Springer New York, 318. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5876-0

23. Arens R. (1957) Complex processes for envelopes of normal noise. *IRE Transactions on Information Theory*, 3 (3), 204–207, DOI: https://doi.org/10.1109/TIT.1957.1057417

24. Bliss Daniel, Siddhartan Govindasamy (2013) *Adaptive wireless communications. MIMO channels and networks*. Cambridge University Press. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139519465

25. Goodman N.R. (1963) Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. *Ann. Math. Statist*, 34, 152–177. DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177704250

26. Shigeki Miyabe, Nobutaka Ono (2015) Estimating correlation coefficient between two complex signals. *International Conference on Latent Variable Analysis and Signal Separation, Liberec, Czech Republic, August 25–28*. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-22482-4_49

REFERENCES

1. Zubarev A.V., Kirillova M.A. (2023) Postroenie modeli GVAR dlya rossijskoi ekonomiki. *Ekonomicheskij zhurnal Vysshei shkoly ekonomiki*, 1, 9–32.

2. Malov D.N. (2019) Ocenka investicionnoi privlekatel'nosti kompanii na osnove modeli VaR (vektornoi avtoregressii) i ARIMA s uchetom riskov. *Innovacii i investicii*, 1, 152–159.

3. Salmanov O.N., Zaernuk V.M., Lopatina O.A. (2016) Ustanovlenie vlijanija denezhno-kreditnoi politiki metodom vektornoi avtoregressii. *Finansy i kredit*, 28, 2–17.

4. Svetun'kov S.G., Bazhenova M.P., Lukash E.V. (2022) Perspektivy ispol'zovaniya vektornyh avtoregressii v ekonomicheskom prognozirovanii. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya*, 6 (150), 44–57. DOI: https://doi.org/10.17308/meps/2078-9017/2022/6/44-57

5. Habrov V.V. (2012) Optimizaciya upravleniya investicionnym portfelem na osnove modeley vektornyh avtoregressiy i modeley mnogomernoy volatil'nosti. *Prikladnaja ekonometrika*, 4 (28), 35–62.

6. Shimanovskiy D.V., Tret'yakova E.A. (2020) Modelirovanie socio-ekologo-ekonomicheskih vzaimosvjazey kak sposob ocenki ustojchivogo razvitiya regionov RF. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Ekonomika*, 3 (15), 369–384. DOI: https://doi.org/10.17072/1994-9960-2020-3-369-384

7. Bin Xu, Boqiang Lin. (2016) What cause a surge in China's CO2 emissions? A dynamic vector autoregression analysis. *Journal of Cleaner Production*, 143, 17–26. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2016.12.159

8. Carolyn N.N., Sherris M. (2020) Modeling mortality with a Bayesian vector autoregression. *Mathematics and Economics* 94, 40–57. DOI: https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.05.011

9. Meimela A., Lestari S.S., Mahdy I.F., Toharudin T., Ruchjana B.N. (2021) Modeling of Covid-19 in Indonesia using vector autoregressive integrated moving average. *Journal of Physics: Conference Series*, 55–79. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1722/1/012079

10. Olson D.A., Riedel T.P., Long R., Offenberg J.H, Lewandowski M., Kleindienst T.E. (2019) Time series analysis of wintertime O3 and NOx formation using vector autoregressions. *Atmospheric Environment*, 218–232. DOI: https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2019.116988

11. Rabeh Khalfaoui, Shawkat Hammoudeh, Mohd Ziaur Rehman. (2023) Spillovers and connectedness among BRICS stock markets, cryptocurrencies, and uncertainty: Evidence from the quantile vector autoregression network. *Emerging Markets Review*, 54, 101002, 16–27. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ememar.2023.101002

12. Shengfeng Li, Hafiz Hoque, Jacco Thijssen. (2021) Firm financial behaviour dynamics and interactions: A structural vector autoregression approach. *Journal of Corporate Finance*, 69, 102028, 53. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcorpfin.2021.102028

13. Thelin E.P., Raj R., Bellander B., Nelson D., Piippo-Karjalainen A., Siironen J., Tanskanen P., Hawrylu G., Hasen M., Unger B., Zeiler F.A. (2020) Comparison of high versus low frequency cerebral physiology for cerebrovascular reactivity assessment in traumatic brain injury: a multi-center pilot study. *Journal of clinical monitoring and computing*, 34 (5), 971–994. DOI: https://doi.org/10.1007/s10877-019-00392-y

14. Wai-Sum Chan, Johnny Siu-Hang Li, Jackie Li. (2014) The CBD Mortality Indexes: Modeling and Applications. *North American Actuarial Journal*, 18 (1), 38–58.

15. Zhang Yi, Cheng Chuntian, Rui Cao, Gang Li, Jianjian Shen, Xinyu Wu (2021) Multivariate probabilistic forecasting and its performance's impacts on long-term dispatch of hydro-wind hybrid systems. *Applied Energy*, 283, 116–243. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.116243

16. Zeiler F.A., Ercole A., Cabeleira M. et al. (2020) Evaluation of the relationship between slow-waves of intracranial pressure, mean arterial pressure and brain tissue oxygen in TBI: a CENTER-TBI exploratory analysis. *Journal of Clinical Monitoring and Computing*, 781–799. DOI: https://doi.org/10.1007/s10877-020-00527-6

17. Brown R.G. (1956) *Exponential Smoothing for Predicting Demand*. Cambridge, Massachusetts: Arthur D. Little Inc.

18. Holt C.C. (1957) *Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Averages*. Pittsburgh, Pennsilvania: Carnegie Institute of Technology. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2003.09.015

19. Lütkepohl H. (2005) *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 764. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-27752-1

20. Neusser K. (2018) *Time Series Econometrics*. Springer International Publishing, 409. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-32862-1

21. Sims C. (1980) Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 48 (1), 1–48. DOI:https://doi.org/10.2307/1912017

22. Svetunkov S. (2012) *Complex-Valued Modeling in Economy and Finance*. NY: Springer New York, 318. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5876-0

23. Arens R. (1957) Complex processes for envelopes of normal noise. *IRE Transactions on Information Theory*, 3 (3), 204–207, DOI: https://doi.org/10.1109/TIT.1957.1057417

24. Bliss Daniel, Siddhartan Govindasamy (2013) *Adaptive wireless communications. MIMO channels and networks*. Cambridge University Press. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139519465

25. Goodman N.R. (1963) Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. *Ann. Math. Statist*, 34, 152–177. DOI: https://doi.org/10.1214/aoms/1177704250

26. Shigeki Miyabe, Nobutaka Ono (2015) Estimating correlation coefficient between two complex signals. *International Conference on Latent Variable Analysis and Signal Separation, Liberec, Czech Republic*, August 25–28. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-22482-4_49

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT AUTHORS

СВЕТУНЬКОВ Сергей Геннадьевич
E-mail: sergey@svetunkov.ru
Sergey G. SVETUNKOV
E-mail: sergey@svetunkov.ru

САМАРИНА Елизавета Сергеевна
E-mail: elizaveta.samarina.00@mail.ru
Elizaveta S. SAMARINA
E-mail: elizaveta.samarina.00@mail.ru

Поступила: 26.10.2023; Одобрена: 28.11.2023; Принята: 28.11.2023.
Submitted: 26.10.2023; Approved: 28.11.2023; Accepted: 28.11.2023.