

DOI: 10.18721/JE.13508
УДК 65.012.25

УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ПРОИЗВОДСТВА ИННОВАЦИОННОЙ ПРОДУКЦИИ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Родионов Д.Г.¹, Алферьев Д.А.²

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

² Вологодский научный центр Российской академии наук,
Вологда, Российская Федерация

План производства является важнейшей частью системы оперативного и стратегического планирования функционирования промышленного предприятия, так как он затрагивает практически все аспекты его деятельности. При этом научно обоснованный оптимальный план производства обеспечивает существенное повышение эффективности деятельности предприятия. Авторами показано, что план производства может рассматриваться как составная часть бизнес-плана развития предприятия с широким комплексом мероприятий и, в более узком аспекте, применительно только к производственной деятельности. Задача формирования плана производства для одного вида продукции (новой или устаревшей) предполагает определение объемов выпуска данной продукции в течение заданного периода времени при заданных ресурсах. Более сложной и, как правило, существующей на практике является задача формирования плана производства для случая, когда предприятие одновременно выпускает инновационную (новую) и устаревшую продукцию. Авторами представлена и формализована задача формирования плана производства промышленного предприятия для одновременного выпуска инновационной и устаревшей продукции. Проведенный анализ публикаций и исследования авторов позволили установить эффективность применения инструментов линейного программирования для формирования плана производства предприятия. В соответствии с этим, целью исследования является формирование оптимального плана производства продукции промышленного предприятия и исследование его устойчивости относительно различных факторов. В статье в терминах линейного программирования представлена базовая математическая модель формирования плана производства для двух видов продукции. Продемонстрирован пример расчета дефицитных разделов плана производства по отношению к задействованным в производстве ресурсам и имеющимся в распоряжении промышленным мощностям. Показано, что использование оценок, полученных при формировании оптимального плана, позволяет определить границы изменения параметров целевой функции, а также границы погрешности для ресурсов-ограничений при условии сохранения сформированной оптимальной структуры плана производства. В свою очередь, это дает возможность разработать план производства, учитывающий возможные изменения при его реализации. В качестве направлений дальнейших исследований авторы видят решение задачи формирования планов производства промышленного предприятия при условии нелинейной целевой функции или ограничений модели.

Ключевые слова: линейное программирование, оптимизация, производство, инновационная продукция, промышленное предприятие, устойчивость, чувствительность

Ссылка при цитировании: Родионов Д.Г., Алферьев Д.А. Устойчивость оптимального плана производства инновационной продукции промышленного предприятия // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. 2020. Т. 13, № 5. С. 106–119. DOI: 10.18721/JE.13508

Это статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

SUSTAINABILITY OF THE OPTIMAL PLAN OF INNOVATIVE PRODUCTION OF AN INDUSTRIAL ENTERPRISE

D.G. Rodionov¹, A.D. Alfer'yev²

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation;

² Vologda Research Center of the Russian Academy of Sciences,
Vologda, Russian Federation

Production plan is the most important part of the system of operational and strategic planning of the functioning of an industrial enterprise, since it affects almost all aspects of its activities. Moreover, a scientifically grounded optimal production plan provides a significant increase in the efficiency of the enterprise. The authors show that the production plan can be considered as an integral part of the business plan for the development of an enterprise with a wide range of activities and, in a narrower aspect, applicable only to production activities. The task of forming a production plan for one type of product (new or outdated) involves determining the volume of output of this product within a given period of time and given resources. More complex and, as a rule, existing in practice is the task of forming a production plan for the case when an enterprise simultaneously produces both innovative (new) and outdated products. The authors presented and formalized the task of forming a production plan for an industrial enterprise simultaneously supplying both innovative and outdated products. The authors' analysis of publications and research made it possible to establish the effectiveness of the use of linear programming tools to form a production plan for an enterprise. Respectively, the purpose of the study is to form an optimal production plan for an industrial enterprise and to study its stability with respect to various factors. In the article, in terms of linear programming, the basic mathematical model for the formation of a production plan for two types of products is presented. An example of calculating the scarce sections of a production plan in relation to the resources involved in the production and the available industrial capacities is demonstrated. It is shown that the use of estimates obtained in the formation of the optimal plan allows one to determine the boundaries of change in the parameters of the objective function, as well as the boundaries of error for resource-constraints, provided that the formed optimal structure of the production plan is preserved. In turn, this makes it possible to develop a production plan that is resistant to possible changes during its implementation. As directions for further research, the authors see the need to solve the problem of forming production plans for an industrial enterprise under the condition of a nonlinear objective function or model limitations.

Keywords: linear programming, optimization, manufacturing, innovative products, industrial enterprise, sustainability, sensitivity

Citation: D.G. Rodionov, A.D. Alfer'yev, Sustainability of the optimal plan of innovative production of an industrial enterprise, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 13 (5) (2020) 106–119. DOI: 10.18721/JE.13508

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

План производства является важнейшей частью системы оперативного и стратегического планирования предприятия, так как он затрагивает практически все аспекты его деятельности. Научно обоснованный оптимальный план производства (производственный план) промышленного предприятия обеспечивает повышение эффективности его деятельности [2, 16, 18, 22, 23, 25]. План производства (производственный план) может рассматриваться как составная часть бизнес-плана развития предприятия. В этом случае план производства представляет собой комплекс различных мероприятий для обеспечения устойчивости и стабильности производства продукции на предприятии в течение определенного периода времени. К таким мероприятиям могут быть отнесены: обоснование требуемого объема ресурсов, наличие производственных мощностей, анализ имеющегося оборудования и технологий, обоснование потребностей в продукции, прогнозирование спроса на продукцию, планирование сбыта и объема продаж, планирование

загрузки производственных мощностей, анализ и обоснование штатной численности и квалификации персонала, контроль качества продукции, анализ и планирование затрат на производство и реализацию продукции.

Назовем задачу формирования такого плана производства *задачей 1*.

Кроме того, план производства (производственный план) может рассматриваться в более узком аспекте применительно только к производственной деятельности. В этом случае считается, что спрос на продукцию существует, потребности в выпускаемой продукции определены, имеются соответствующие производственные, технологические и человеческие ресурсы для организации производства и выпуска продукции.

Назовем задачу формирования такого плана производства *задачей 2*.

План производства, как правило, представляет собой документ, в котором закрепляются (обосновываются) основные показатели деятельности предприятия.

Если в плане производства отражается только производственная деятельность (план производства, рассматриваемый в более узком аспекте — задача 2), то в этом случае план производства представляет собой документ, в котором отражается объем производства и реализации продукции за определенный временной интервал соответствующей номенклатуры, ассортимента, качества и цены.

В статье авторы рассматривают формирование плана производства в формате задачи 2.

План производства разрабатывается:

- 1) в целом по предприятию и в разрезе его отдельных структурных подразделений (производства, цеха, участки);
- 2) по всей номенклатуре и ассортименту выпускаемой продукции;
- 3) по объемным показателям (объем выпускаемой продукции, объем требуемых ресурсов и т.д.);
- 4) по срокам.

Таким образом, основными показателями плана производства являются номенклатура, ассортимент и объем производства (выпуска) продукции. Объем выпуска продукции планируется в натуральных и стоимостных показателях (в объемных показателях).

На предприятии может выпускаться различная продукция с точки зрения ее новизны или инновационности. В соответствии со стандартами Федеральной службы государственной статистики под инновационной продукцией понимается продукция, которая производится и реализуется на рынке не более трех лет, или продукция, подвергавшаяся в течение последних трех лет разной степени технологическим изменениям¹. Будем называть такую продукцию *инновационной или новой*.

Соответственно, продукция, реализующаяся на рынке более трех лет и не подвергавшаяся разной степени технологическим изменениям, уже не является инновационной (новой). Такую продукцию в рамках данной статьи будем называть *устаревшей*, подчеркивая тем самым то, что она уже производилась на предприятии в течении определенного времени (более трех лет), и за это время морально устарела.

Задача формирования плана производства для одного вида продукции (новая или устаревшая) предполагает определение объемов выпуска данной продукции в течение заданного периода времени при заданных ресурсах. Решение задачи формирования плана производства в данном случае облегчается наличием одного вида продукции.

Более сложной и, как правило, существующей на практике является задача формирования плана производства для случая, когда предприятие одновременно выпускает и инновационную (новую) и устаревшую продукцию [3, 6, 10, 12, 17]. В этом случае решение задачи формирования плана производства предполагает определение объемов производства (выпуска) продукции раз-

¹ Объем инновационных товаров, работ, услуг // Официальный сайт Росстата. URL: https://rosstat.gov.ru/free_doc/new_site/business/nauka/minnov-3.htm

ных видов (новой и устаревшей) в течение заданного периода времени при заданных ресурсах. Понятно, что продукция будет отличаться по своим потребительским свойствам (предполагается, что инновационная продукция имеет более высокие потребительские свойства и пользуется большим спросом на рынке), требуемым ресурсам, затратам на производство и реализацию продукции. Соответственно, задача формирования плана производства и определения объемов выпуска продукции различных видов усложняется и требует принятия научно обоснованных решений на основе применения оптимизационных методов.

В соответствии с изложенным, представим объект, предмет, цель и задачи исследования.

Объектом исследования выступает производственное предприятие, осуществляющее выпуск продукции различных видов соответствующей номенклатуры и ассортимента. В качестве **предмета исследования** рассматривается план производства в формате задачи 2.

Необходимо отметить, что одной из проблем, снижающих качество плана производства, является обеспечение его устойчивости [5, 8, 20, 21, 24]. Таким образом, **целью исследования** является формирование оптимального плана производства продукции промышленного предприятия и исследование его устойчивости относительно различных факторов.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие задачи исследования:

- 1) сформулировать базовую задачу оптимизации плана производства для предприятия, производящего инновационную и устаревшую продукцию;
- 2) разработать оптимальный план производства продукции на примере решения базовой задачи;
- 3) провести оценку чувствительности модели к изменению параметров целевой функции и ее ограничений;
- 4) сформулировать выводы и рекомендации на основе результатов анализа чувствительности модели.

Постановка задачи и методы исследования

Анализ публикаций [4, 7, 9, 11–15, 19] и проведенные исследования авторов позволили установить эффективность применения инструментов линейного программирования для формирования плана производства предприятия. Метод линейного программирования позволяет не только оптимизировать значения плана производства, но также оценить изменения плана в случае изменения исходных данных (сокращение выделяемых ресурсов, изменение потребности в продукции, снижение качества и потребительских свойств продукции и т.д.), обусловленных как внешними воздействующими факторами, так и факторами внутренней среды предприятия.

Рассмотрим и формализуем задачу формирования плана производства продукции промышленного предприятия при условии наличия двух видов продукции — инновационной и устаревшей (задача 2). Для решения будем использовать метод линейного программирования, который обеспечивает нахождение оптимального решения (плана производства) [4, 5].

В базовом виде для решения задачи формирования плана производства может быть представлена целевая функция (1), обеспечивающая максимизацию объемов производства продукции:

$$F = x + y \rightarrow \max \quad (1)$$

где x — количество производимой инновационной (новой) продукции, выраженное в натуральных единицах, y — количество устаревшей продукции, выраженное в натуральных единицах.

Для наглядности рассмотрим задачу, сформулированную автором в работе [1]. В рамках данной задачи рассматривается предприятие, которое в соответствии с текущим техническим оснащением способно производить три типа инновационной продукции: изделие 1 типа 159Ч1400, изделие 2 типа 159Ч1600, изделие 3 типа 159Ч425.

Установлено, каждый из данных типов продукции будет успешно реализован на рынке в том объеме, который предприятие способно произвести. Также на предприятии выпускается устаревшая продукция — изделие 4.

Производственные мощности предприятия позволяют произвести изделие 1 в количестве 50 ед., изделие 2 — 40 ед., изделие 3 — 100 ед. Цех, производящий изделие 4, за год способен произвести 1000 ед. Минимальное количество выпускаемых изделий 4 составляет 200 ед.

Для изготовления инновационной продукции каждого из трех типов задействован условный производственный ресурс — усл. ед. Его расход на 1 ед. инновационной продукции для изделия 1 составляет 2 усл. ед., для изделия 2 — 4 усл. ед., для изделия 3 — 10 усл. ед., соответственно. Для производства устаревшей продукции расход ресурса на 1 единицу продукции составляет 0,5 усл. ед. При этом предельный расход данного ресурса составляет 1000 усл. ед. Известно также, что при изготовлении единицы каждого инновационного продукта необходимо затратить 2 ед. продукции из старого ассортимента ряда.

Требуется сформировать такой план производства продукции, который обеспечивает максимизацию объемов производства при наличии ограничений на объем ресурсов и производственные мощности предприятия. При этом полученные значения переменных должны быть целочисленными. Формализованная запись данной задачи выглядит следующим образом:

$$\text{Целевая функция:} \quad F = x_1 + x_2 + x_3 + y \rightarrow \max \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ограничения:} \quad & 0 \leq x_1 \leq 50 \\ & 0 \leq x_2 \leq 40 \\ & 0 \leq x_3 \leq 100 \end{aligned} \quad (3)$$

$$200 \leq y \leq 1000$$

$$2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 0.5y \leq 1000 \quad (4)$$

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \leq y - 200 \quad (5)$$

где (2) — целевая функция максимизации объемов производства; (3) — ограничения, обусловленные возможностью технологии и производственными мощностями; (4) и (5) — ограничения на использование ресурсов.

Переменные и символьные обозначения

x_i ; $i = \overline{1, 3}$ — количество производимой инновационной продукции i -го типа; y — количество производимой устаревшей продукции.

Результаты исследования

Оптимальное решение задачи, сформулированной при заданных исходных данных, представлено в табл. 1.

В соответствии с исходной задачей может быть представлена двойственная задача, которая представлена в табл. 2.

Таблица 1. Оптимальное решение задачи формирования плана производства
Table 1. Optimal solution to the optimization problem

Наименование ограничения	Норматив расхода на изготовление				Общий фактический расход	Ограничения
	x_1	x_2	x_3	y		
Ресурс	2	4	10	0.5	1000	1000
Мощности для выпуска изделия 1	1	0	0	0	50	50
Мощности для выпуска изделия 2	0	1	0	0	40	40
Мощности для выпуска изделия 3	0	0	1	0	24	100
Мощности для выпуска устаревшего изделия	0	0	0	1	1000	1000
y при x_i	2	2	2	0	228	800
Решение						
Производство	50	40	24	1000	1114	max

Таблица 2. Переход от прямой задачи к двойственной
Table 2. Transition from a direct task to a secondary one

$x_1 + x_2 + x_3 + y \rightarrow \max$	\leftrightarrow	$50c_1 + 40c_2 + 100c_3 + 200c_4 + 1000c_5 + 1000c_6 - 200c_7 \rightarrow \min$
$x_1 \geq 0$	\leftrightarrow	$c_1 + 2c_6 + 2c_7 \geq 1$
$x_2 \geq 0$	\leftrightarrow	$c_2 + 4c_6 + 2c_7 \geq 1$
$x_3 \geq 0$	\leftrightarrow	$c_3 + 10c_6 + 2c_7 \geq 1$
$y \geq 0$	\leftrightarrow	$c_4 + c_5 + 0.5c_6 - c_7 \geq 1$
$x_1 \leq 50$	\leftrightarrow	$c_1 \geq 0$
$x_2 \leq 40$	\leftrightarrow	$c_2 \geq 0$
$x_3 \leq 100$	\leftrightarrow	$c_3 \geq 0$
$y \geq 200$	\leftrightarrow	$c_4 \leq 0$
$y \leq 1000$	\leftrightarrow	$c_5 \geq 0$
$2x_2 + 4x_3 + 10x_3 + 0.5y \leq 1000$	\leftrightarrow	$c_6 \geq 0$
$2(x_1 + x_2 + x_3) \leq y - 200$	\leftrightarrow	$c_7 \geq 0$

где \leftrightarrow — символ сопряжения неравенств прямой и двойственной задач.

Из таблицы и условий прямой задачи сформируем матрицы пересчета для двойственной задачи (в базис оптимального плана вошли следующие переменные $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8, x_{11}\}$):

$$P = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0);$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & -0.4 & 0 & 0 & -0.5 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 1 & 0 & 0.05 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1.6 & -1.2 & 0 & 0 & 1.1 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы двойственности следует, что $C_{\text{опт}} = PA^{-1}$. В этом случае оптимальный план применительно к двойственной задаче примет вид:

$$c_1 = 0.8; c_2 = 0.6; c_3 = 0; c_4 = 0; c_5 = 0.95; c_6 = 0.1; c_7 = 0.$$

В соответствии с полученными решениями могут быть определены дефицитные и избыточные ресурсы. Для этого результаты определения оптимального плана для прямой задачи подставим в систему имеющихся ограничений:

$$x_1 = 50 \mid \Rightarrow 50 = 50; \tag{6}$$

$$x_2 = 40 \mid \Rightarrow 40 = 40; \tag{7}$$

$$x_3 = 24 \mid \Rightarrow 24 < 100; \tag{8}$$

$$y = 1000 \mid \Rightarrow 200 < 1000 = 1000; \tag{9}$$

$$2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 0.5y = 2 \cdot 50 + 4 \cdot 40 + 10 \cdot 24 + 0.5 \cdot 1000 = 1000 \mid \Rightarrow 1000 = 1000; \tag{10}$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - y = 2 \cdot 50 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 24 - 1000 = -772 \mid \Rightarrow -772 < 200. \tag{11}$$

6-е, 7-е и 10-е ограничения выполняются как равенства, что указывает на полное использование данных ресурсов (изделие 1, изделие 2, а также ресурс для изготовления всех видов продукции, производимых промышленным предприятием) при оптимальном плане. Из этого следует, что их обоснование определяется дефицитом, в связи с чем они не могут быть использованы для какой-либо сторонней реализации (например, продажи или сдачи в аренду).

Ограничения вида (8) и (11) выполняются как неравенства (изделие 3 и устаревшая продукция). Это указывает на потенциальный резерв производства, который может использоваться для развития предприятия и повышения эффективности. Потенциальный резерв изделия 3 составляет $100 - 24 = 76$ нереализованных единиц продукции, которые предприятие может реализовать при выполнении дополнительных условий либо при другой комбинации исходных данных. Исходя из условий задачи, препятствующими ограничениями могут выступать задействованный

ресурс и устаревшая продукция, так как их использование непосредственно затронуто при изготовлении изделия 3.

Необходимо отметить резерв, обусловленный 10-м ограничением. Согласно расчету, он составляет $-200 - (-772) = 572$, т.е. в соответствии с определенным оптимальным планом в запасе остается 572 единицы устаревшей продукции, которые, как было отмечено выше, могут быть использованы при задействовании недоиспользованных мощностей по изделию 3. Норматив на производство одного изделия 3 в номенклатуре устаревшей продукции составляет 2 ед. Итого $76 \cdot 2 = 152$ ед. устаревшей продукции необходимы промышленному предприятию, чтобы в полной мере реализовать производственные мощности по изготовлению инновационной продукции. Из этого также следует, что $572 - 152 = 420$ единиц устаревшей продукции остается у предприятия при полной реализации имеющихся в его распоряжении мощностей. Соответственно, они могут быть использованы как для реализации, так и для обеспечения дополнительных единиц инновационной продукции в случае расширения производства продукции изделий 1, 2 или 3.

Еще одна особенность, которую следует выделить при проведении анализа и определении дефицитных или избыточных ресурсов — это наличие двойного неравенства, обуславливающего производство продукции типа y . По своей экономической сущности это более детальная корректировка неотрицательности производимой продукции ($y \geq 0 \mid \Rightarrow y \geq 200$). Тем не менее, резерва ресурсов при этом не имеется. Об этом свидетельствует равенство $y = 1000$ (верхняя граница ресурсов для устаревшей продукции).

На основании изложенного может быть сформулирован регламент условий, которые обуславливают два варианта развития событий при наличии оптимального плана производства:

— если выполняется математическое ограничение условного вида *фактическое производство* > *норматив*, то есть резерв производимой продукции. В этом случае следует обратить внимание на ее возможную реализацию, акцентировать внимание на расширение клиентской базы, выход на новые рынки сбыта;

— если выполняется математическое ограничение условного вида *фактическое производство* < *норматив*, то есть резерв незадействованных производственных мощностей. Так как план производства является оптимальным, то при имеющихся ограничениях эти резервы задействовать невозможно. Или, если сформулировать точнее, это нельзя осуществить без изменения комбинации продукции, определенной к выпуску. В этом случае необходимо реализовать процесс, направленный либо на дальнейшее развитие производственных мощностей предприятия, либо на ликвидацию незадействованных мощностей (их деактивация с дальнейшей продажей, либо сдачей в лизинг) с целью сокращения издержек на их содержание и обслуживание.

Значения переменных для оптимального решения двойственной задачи (c_i) представляют собой оценки объектов исходной задачи. Их можно представить через частную производную оптимального значения целевой функции по i -му виду продукции или, иначе говоря, это будет скорость изменения оптимального локального значения при изменении i -го вида продукции:

$$c_i = \frac{\partial F_i}{\partial b_i},$$

$$\partial F_i \approx \Delta F_i, \partial b_i \approx \Delta b_i \mid \Rightarrow \Delta F \approx c_i \Delta b_i.$$

Выражение (12) показывает, что при изменении i -го вида продукции значение целевой функции является линейной функцией от его приращения. При этом коэффициентом выступает c_i . Соответственно, если c_i имеет малое значение, то рост i -го вида продукции будет в незначительной мере увеличивать значение целевой функции, из чего можно сделать вывод, что ценность

i -го вида продукции невелика. Если $c_i = 0$, то увеличение i -го ресурса оставит значение целевой функции без изменения, следовательно, его ценность равна нулю. И, наконец, если c_i велико, то даже при незначительном изменении i -го вида продукции значение целевой функции увеличится значительно. Ценность подобного ресурса будет являться наибольшей.

В соответствии с целевой функцией двойственной задачи ($50c_1 + 40c_2 + 100c_3 + 200c_4 + 1000c_5 + 1000c_6 - 200c_7 \rightarrow \min$) и полученными при этом оценкам $C = \{c_1 = 0.8; c_2 = 0.6; c_3 = 0; c_4 = 0; c_5 = 0.95; c_6 = 0.1; c_7 = 0\}$ могут быть проранжированы дефицитные ресурсы в порядке их убывания. В данном случае подобной продукцией является продукция изделий 1 и 2, а также устаревшая продукция и задействованный в работе производственный ресурс. Это обусловлено тем, что их использование полностью удовлетворяет верхнюю границу ограничений. Подставив оценки C в целевую функцию двойственной задачи, получим:

$$50 \cdot 0.8 + 40 \cdot 0.6 + 100 \cdot 0 + 200 \cdot 0 + 1000 \cdot 0.95 + 1000 \cdot 0.1 - 200 \cdot 0 = 40 + 24 + 950 + 100 = 1114.$$

Исходя из полученного результата, можно сделать вывод, что наибольший вклад ($c_5 b_5$) внесен за счет устаревшей продукции. Затем в соответствии с полученным распределением рассматривается используемый ресурс ($c_6 b_6$) изделия 1 (x_1) и, наконец, изделия 2 (x_2). Но если проиллюстрировать распределение в соответствии с полученными оценками оптимального плана двойственной задачи, то наибольший вклад в целевую функцию, как и прежде, вносит продукция старого типа ($c_5 = 0.95$), а затем идут оценки инновационной продукции изделий 1 и 2 ($c_1 = 0.8, c_2 = 0.6$). При этом их оценки довольно высокие в сравнении с продукцией-лидером, что указывает на высокий вклад при изменении условий задачи при данных ограничениях. Используемый ресурс хоть и имеет положительную оценку, но данная оценка в сравнении с остальными менее значима. Второй по значимости фактический вклад в максимизацию целевой функции удалось внести за счет больших объемов реализации. В будущем при расширении производственных мощностей предприятия его дополнительная реализация должна быть в изделиях менее значимых.

Симплекс-таблицу (табл. 1) можно также использовать для проведения анализа чувствительности (устойчивости) модели и полученного решения задачи линейного программирования.

Анализ чувствительности проводится по 2 направлениям:

- 1) определение чувствительности к изменению коэффициентов целевой функции;
- 2) определение чувствительности к изменению запасов ресурсов.

Проведем оценку чувствительности к изменению коэффициентов целевой функции. Так как изменения коэффициентов целевой функции оказывают непосредственное влияние на оптимизацию всего плана производства, то перед предприятием возникает задача определения диапазонов изменения данных коэффициентов, что позволит, в свою очередь, более гибко и оперативно контролировать производственный процесс. Для их поиска введем обозначение $\Delta\alpha_1$. В соответствие с выражением $C_{\text{опт}} = PA^{-1}$ может быть сформировано условие устойчивости:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_1 - 0.2\Delta\alpha_3 + 0.8 \geq 0, \\ \Delta\alpha_2 - 0.4\Delta\alpha_3 + 0.6 \geq 0, \\ -0.05\Delta\alpha_3 + \Delta\alpha_4 + 0.95 \geq 0, \\ 0.1\Delta\alpha_3 + 0.1 \geq 0. \end{cases}$$

Для нахождения границ рассматриваемых оценок последовательно будем приравнивать значения $\Delta\alpha_1$ к нулю, кроме одного:

$$\Delta\alpha_1 \neq 0, \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = \Delta\alpha_4 = 0, \text{ тогда}$$

$$\Delta\alpha_1 \geq -0.8.$$

Из этого следует, что коэффициент перед переменной x_1 при сохранении структуры имеющегося оптимального плана может находиться в полуинтервале $[1-0.8; 1+\infty) = [0.2; \infty)$. В этом случае значения полученных переменных будут отражать тот уровень производства, который был получен при решении прямой задачи. Аналогичным образом найдем границы потенциального изменения коэффициентов для оставшихся в целевой функции переменных.

$$x_2 \in [0.4; \infty),$$

$$y \in [0.05; \infty).$$

Интересным случаем является анализ границ коэффициентов для переменной x_3 . Она фигурирует в четырех имеющихся условиях. В этом случае будет получено четыре различных неравенства: $\Delta\alpha_3 \leq 4$, $\Delta\alpha_3 \leq 1.5$, $\Delta\alpha_3 \leq 19$, $\Delta\alpha_3 \geq -1$. Исходя из этого, значения коэффициента перед переменной x_3 будут находиться в интервале $[0; 2.5]$. Так как имеется условие, что величина Δ должна быть меньше определенного значения, это обуславливает появление верхнего порога. Соответственно, из имеющихся трех вариантов берется тот, который имеет наименьшее значение.

В итоге можно отметить, что более обусловленным является выпуск изделия 3. Это указывает на отсутствие полной незагрузки мощностей по этой продукции. В случае повышения ее ценности в производстве структура оптимизационного плана будет изменяться, так как имеющиеся ресурсы будут перераспределены на перспективную продукцию. Для данных условий следует обратить внимание на развитие производства, о чем также ранее было сказано при определении избыточности мощностей при выполнении условия общего вида *фактическое производство < норматив*.

Проведем оценку чувствительности к изменению ограничений. Аналогично коэффициентам целевой функции может быть определена граница для изменения начальных ограничений, при которых структура (решение) оптимального плана останется неизменной. Искомый диапазон определяется посредством базисных переменных, вошедших в оптимальный план двойственной задачи и обратной матрицы A^{-1} .

Система неравенств примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta b_1 + 50 \geq 0, \\ \Delta b_2 + 40 \geq 0, \\ -0.2\Delta b_1 - 0.4\Delta b_2 - 0.05\Delta b_3 + 0.1b_6 + 24 \geq 0, \\ \Delta b_3 + 1000 \geq 0, \\ 0.2\Delta b_1 + 0.4\Delta b_2 + \Delta b_3 + 0.05\Delta b_5 - 0.1\Delta b_6 + 76 \geq 0, \\ -\Delta b_4 - \Delta b_3 + 800 \geq 0, \\ -1.6\Delta b_1 - 1.2\Delta b_2 + 1.1\Delta b_3 - 0.2\Delta b_6 + \Delta b_7 + 572 \geq 0. \end{cases}$$

По аналогичной схеме, как и в случае с оценками целевой функции, последовательно будем приравнять переменную Δb_i к нулю, кроме одного единственного варианта:

$$\Delta b_1 \neq 0, \Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = \Delta b_5 = \Delta b_6 = \Delta b_7 = 0,$$

тогда

$$\Delta b_1 \geq -50, \Delta b_1 \geq -380, \Delta b_1 \leq 120, \Delta b_1 \leq 375.5.$$

Из представленных расчетов следует: $b_1 \in [0, 170]$.

В этом случае при условии неизменности прочих ограничений может быть сохранено достигнутое максимальное значение целевой функции. Для прочих переменных b_i интервалы будут выглядеть следующим образом:

$$b_2 \in [0, 100],$$

$$b_3 \in [24, \infty],$$

$$b_4 \in (\infty, 1000],$$

$$b_5 \in [480, 1480],$$

$$b_6 \in [760, 1760],$$

$$b_7 \in [-772, \infty).$$

Заключение

Таким образом, на основании представленных результатов можно сделать ряд выводов.

1. Применение инструментария линейного программирования позволяет сформировать производственный план, в структуру которого включается как инновационная (новая) продукция, так и устаревшая продукция, которая выпускается на предприятии более трех лет. Это позволяет внедрять в технологические цепочки новые проекты по производству продукции и оптимизировать ресурсы на их реализацию.

2. В соответствии с полученными оценками оптимального производственного плана могут быть определены дефицитные разделы плана, выраженные как в виде недостатка имеющихся ресурсов и, соответственно, недозагруженных производственных мощностей, так и в виде отсутствия необходимых производственных мощностей, необходимых для производства дополнительных изделий. В свою очередь, понимание данной ситуации позволит предприятию выбрать эффективные направления вложения средств для его развития.

3. Использование оценок, полученных при формировании оптимального плана, позволяет определить границы изменения параметров целевой функции, а также границы погрешности для ресурсов-ограничений при условии сохранения сформированной оптимальной структуры плана производства. В свою очередь, это дает возможность разработать план производства устойчивым при потенциальных изменениях в ходе его реализации.

В качестве направлений дальнейших исследований авторы видят решение задачи формирования планов производства промышленного предприятия при условии нелинейной целевой функции или ограничений модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алферьев Д.А. Планирование производства инновационной продукции на основе линейного программирования // Проблемы развития территории. 2017. № 2(88). С. 165–176.
2. Алферьев Д.А., Кремин А.Е. Многоцелевая оптимизация программы выпуска продукции // Вестник университета. 2019. № 12. С. 92–101. DOI: 10.26425/1816-4277-2019-12-92-101
3. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в конкретных ситуациях. М.: ТЕИС, 1999. 87 с.

4. **Банди Б.** Основы линейного программирования. М.: Радио и связь, 1989. 176 с.
5. **Городжий А.В., Агишева Д.К. и др.** Линейное программирование. Проведение анализа устойчивости найденных оптимальных оценок // Современные наукоемкие технологии. 2014. № 5–2. С. 189–190.
6. **Дорошенко Ю.Н., Дубровин В.И.** Система управления качеством промышленного предприятия // Радиоэлектроника, информатика, управління. 2000. № 1. С. 142–148.
7. **Зяц О.И., Макаров В.М., Семенова С.В.** Метод оптимизации резервного запаса // Логистика и управление цепями поставок. 2005. № 5(10). С. 56–73.
8. **Иваницкий Е.** Анализ чувствительности задачи линейного программирования // Новости науки в АПК. 2019. № 3(12). С. 556–560. DOI: 10.25930/2218-855X/138.3.12.2019
9. **Канторович Л.В.** Математико-экономические работы. Новосибирск: Наука, 2011. 760 с.
10. **Кацко И.А.** Этапы построения математических моделей для управления в социально-экономических системах // Экономический вестник Ростовского государственного университета. 2008. № 1–3. С. 165–168.
11. **Maraxovskij A.S., Babkin A.V., Shiryaeva N.V.** Optimal control over unstable macroeconomic systems. St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 2015, no. 2, pp. 18–24. DOI: 10.5862/JE.216.2
12. **Машунин Ю.К.** Моделирование и программная реализация инновационного развития промышленного предприятия // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. 2016. № 3. С. 78–92. DOI: 10.5862/JE.245.8
13. **Новожилов В.В.** Проблемы измерения затрат и результатов для оптимального планирования. М.: Наука, 1972. 432 с.
14. **Радаев А.Е., Кобзев В.В.** Оптимизационная модель обоснования состава парка средств межцехового транспорта для обслуживания производственно-складской системы предприятия // Организатор производства. 2016. № 2(69). С. 93–100.
15. **Радаев А.Е., Левенцов В.А., Кобзев В.В.** Оптимизационные модели обоснования характеристик системы управления многономенклатурными запасами на промышленном предприятии // Логистика и управление цепями поставок. 2017. № 3(80). С. 4–20.
16. **Рогулин Р.С.** Построение нетривиальной экономико-математической модели для менеджмента производственных организаций // Российский экономический журнал. 2020. № 1. С. 108–116. DOI: 10.33983/0130-9757-2020-1-108-116
17. **Родионов Д.Г., Николова Л.В.** Системная оптимизация риска инновационной программы региона // Реструктуризация экономики и инженерное образование: проблемы и перспективы развития. Сборник трудов научно-практической конференции с международным участием. СПб.: СПбПУ, 2015. С. 78–86.
18. **Amole B.B., Adebisi S.O., Misbaudeen O.** Production planning in the Nigerian detergent producing firm: A linear programming method. Fountain University Journal of Management and Social Sciences, 2016, no. 5(1), pp. 74–87.
19. **Danø S.** Linear programming in industry. Theory and applications. An introduction. Vienna, Springer, 1965. DOI: 10.1007/978-3-7091-3453-5
20. **Higle J.L., Wallace S.W.** Sensitivity analysis and uncertainty in linear programming. Journal on Applied Analytics, 2003, no. 33–4. DOI: 10.1287/inte.33.4.53.16370
21. **Khan I.U., Bajuri N.H., Jadoon I.A.** Optimal production planning for ICI Pakistan using linear programming and sensitivity analysis. International Journal of Business and Social Science, 2011, no. 2–23, pp. 206–212.
22. **Krynke M., Mielczarek K.** Applications of linear programming to optimize the cost-benefit criterion in production processes. MATEC Web of Conferences, 2018, no. 183, 04004. DOI: 10.1051/matec-conf/201818304004
23. **Oladejo N.K.** Application of optimization principle in Landmark University project selection under multi-period capital rationing using linear and integer programming. Open Journal of Optimization, 2019, no. 8–3, pp. 73–82. DOI: 10.4236/ojop.2019.83007
24. **Prasetyani R., Rafsanjani A.Y., Rimantho D.** Optimization benefits analysis in production process of fabrication components. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., 2017, no. 277, 012038. DOI: 10.1088/1757-899X/277/1/012038
25. **Woubante G.W.** The Optimization problem of product mix and linear programming applications: Case study in the apparel industry. Open Science Journal, 2017, no. 2–2. DOI: 10.23954/osj.v2i2.853

REFERENCES

1. **D.A. Alfer'ev**, Planning the production of innovative products based on linear programming. Problems of Territory's Development, 2017, no. 2(88), pp. 165–176. (rus)
2. **D.A. Alfer'ev, A.E. Kremin**, Multi-purpose optimization of the product release program. Vestnik Universiteta, 2019, no. 1(12), pp. 92–101. (rus). DOI: 10.26425/1816-4277-2019-12-92-101
3. **M.Yu. Afanasyev, B.P. Suvorov**, Issledovaniye operatsiy v konkretnykh situatsiyakh [Research of operations in specific situations]. Moscow, TEIS, 1999. 87 p. (rus)
4. **B. Bandi**, Osnovy lineynogo programmirovaniya [Fundamentals of linear programming]. Moscow, Radio and communication, 1989. 176 p. (rus)
5. **A.V. Gorodzhiiy, D.K. Agisheva, et al.**, Lineynoye programmirovaniye. Provedeniye analiza ustoychivosti naydennykh optimal'nykh otsenok [Linear programming. Analysis of the stability of the optimal estimates found]. Sovremennyye naukoymkiye tekhnologii, 2014, no. 5–2, pp. 189–190. (rus)
6. **Yu.N. Doroshenko, V.I. Dubrovin**, Sistema upravleniya kachestvom promyshlennogo predpriyatiya [Industrial enterprise quality management system]. Radio Electronic, Computer Science, Control, 2000, no. 1, pp. 142–148. (rus)
7. **O.I. Zayats, V.M. Makarov, S.V. Semenova**, Safety stock optimization method. Logistics and supply chain management, 2005, no. 5(10), pp. 56–73. (rus)
8. **E. Ivanitsky**, Sensitivity analysis of linear programming problem. Novosti nauki v APK, 2019, no. 3(12), pp. 556–560. (rus). DOI: 10.25930/2218-855X/138.3.12.2019
9. **L.V. Kantorovich**, Matematiko-ekonomicheskiye raboty [Mathematical and economic works]. Novosibirsk, Science, 2011. 760 p. (rus)
10. **I.A. Katsko**, Etapy postroyeniya matematicheskikh dlya upravleniya v sotsial'no-ekonomicheskikh sistemakh modeley [Stages of constructing mathematical models for management in socio-economic systems]. Ekonomicheskii vestnik Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta, 2008, no. 1–3, pp. 165–168. (rus)
11. **A.S. Maraxovskij, A.V. Babkin, N.V. Shiryayeva**, Optimal control over unstable macroeconomic systems. St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 2015, no. 2, pp. 18–24. DOI: 10.5862/JE.216.2
12. **Yu.K. Mashunin**, Modeling and software implementation of innovative development of the industrial enterprise. St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 2016, no. 3, pp. 78–92. (rus). DOI: 10.5862/JE.245.8
13. **V.V. Novozhilov**, Problemy izmereniya i rezultatov dlya optimalnogo planirovaniya [Measurement and results issues for optimal planning]. Moscow, Science, 1972. 432 p. (rus)
14. **A.E. Radaev, V.V. Kobzev**, Optimization model for substantiating the composition of the fleet of interdepartmental transport means for servicing the production and warehouse system of an enterprise. Production organizer, 2016, no. 2(69), pp. 93–100. (rus)
15. **A.E. Radaev, V.A. Leventsov, V.V. Kobzev**, Optimization models for substantiating the characteristics of a multi-product inventory management system at an industrial enterprise. Logistics and supply chain management, 2017, no. 3(80), pp. 4–20. (rus)
16. **R.S. Rogulin**, Building a non-trivial economic and mathematical model for management of production organizations. Russian Economic Journal, 2020, no. 1, pp. 108–116. (rus). DOI: 10.33983/0130-9757-2020-1-108-116
17. **D.G. Rodionov, L.V. Nikolova**, Systemic optimization of the risk of the regional innovation program. Economic restructuring and engineering education: problems and development prospects. Proceedings of a scientific and practical conference with international participation. St. Petersburg, SPbPU, 2015, pp. 78–86. (rus)
18. **B.B. Amole, S.O. Adebiyi, O. Misbaudeen**, Production planning in the Nigerian detergent producing firm: A linear programming method. Fountain University Journal of Management and Social Sciences, 2016, no. 5(1), pp. 74–87.
19. **S. Danø**, Linear programming in industry. Theory and applications. An introduction. Vienna, Springer, 1965. DOI: 10.1007/978-3-7091-3453-5
20. **J.L. Higle, S.W. Wallace**, Sensitivity analysis and uncertainty in linear programming. Journal on Applied Analytics, 2003, no. 33–4. DOI: 10.1287/inte.33.4.53.16370
21. **I.U. Khan, N.H. Bajuri, I.A. Jadoon**, Optimal production planning for ICI Pakistan using linear programming and sensitivity analysis. International Journal of Business and Social Science, 2011, no. 2–23, pp. 206–212.

22. **M. Krynke, K. Mielczarek**, Applications of linear programming to optimize the cost-benefit criterion in production processes. MATEC Web of Conferences, 2018, no. 183, 04004. DOI: 10.1051/matec-conf/201818304004

23. **N.K. Oladejo**, Application of optimization principle in Landmark University project selection under multi-period capital rationing using linear and integer programming. Open Journal of Optimization, 2019, no. 8–3, pp. 73–82. DOI: 10.4236/ojop.2019.83007

24. **R. Prasetyani, A.Y. Rafsanjani, D. Rimantho**, Optimization benefits analysis in production process of fabrication components. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., 2017, no. 277, 012038. DOI: 10.1088/1757-899X/277/1/012038

25. **G.W. Woubante**, The Optimization problem of product mix and linear programming applications: Case study in the apparel industry. Open Science Journal, 2017, no. 2–2. DOI: 10.23954/osj.v2i2.853

Статья поступила в редакцию 08.09.2020.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ / THE AUTHORS

РОДИОНОВ Дмитрий Григорьевич

E-mail: drodionov@spbstu.ru

RODIONOV Dmitry G.

E-mail: drodionov@spbstu.ru

АЛФЕРЬЕВ Дмитрий Александрович

E-mail: alferev_1991@mail.ru

ALFER'YEV Dmitriy A.

E-mail: alferev_1991@mail.ru

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2020