

DOI: 10.18721/JE.10302  
УДК 330.33.01

## ЦИКЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И БИФУРКАЦИИ НА РЕФЛЕКСИВНЫХ РЫНКАХ

**Б.В. Корнейчук**

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Санкт-Петербургский филиал, Санкт-Петербург, Российская Федерация

В условиях кризиса и растущей неопределенности экономического развития возрастает актуальность изучения циклов и состояний бифуркации, в которых малые регулирующие воздействия способны придать динамическому процессу диаметрально противоположные свойства. Методология исследования базируется на трех принципах, которые позволили нам разработать новую модель циклической динамики и исследовать факторы цикличности, отличные от факторов в модели циклов Гудвина. Индуктивный подход опирается на универсальную схему взаимосвязи экономических переменных и исключает введение дополнительных теоретических предположений. В отличие от дедуктивного подхода, эмпирические оценки показателей определяются до начала анализа модели и оказывают определяющее влияние на характер полученных выводов. Принцип рефлексивности означает, что субъекты одного рынка являются объектами воздействия другого, этот принцип реализован в предположении, что функции спроса и предложения на каждом рынке зависят как от цены, так и от изменений всех цен. Принцип линейности постулирует линейную зависимость между эндогенными переменными и их производными и позволяет исследовать циклические процессы и состояния бифуркации при помощи относительно простой системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, включающей условия кейнсианского равновесия и равновесия на рынке труда. Разработаны теоретические и инструментальные основы рефлексивной модели экономической динамики, проведен ее анализ для случая двух и трех связанных рынков; определены условия цикличности и особенности состояний бифуркации; исследован характер динамики макроэкономических переменных. Получен ряд выводов. Во-первых, модель показала свою продуктивность при анализе циклов на рефлексивных рынках, а упрощающее предположение о линейном виде функций не стало препятствием для описания и исследования разнообразных типов динамики и состояний бифуркации. Во-вторых, экзогенные параметры модели могут быть получены эмпирически до начала ее анализа, что позволяет учитывать особенности динамических процессов с учетом институциональной специфики экономических систем. Линейный характер модели позволяет использовать для их расчета методы регрессионного анализа на основе общедоступных данных мониторинга, что повышает практическую значимость модели. В-третьих, модель допускает обобщение на случай произвольного количества рефлексивных рынков, при этом актуальным направлением будущих исследований является исследование четырехмерной модели с валютным рынком, а также глобальной модели мировой экономики с рефлексивным взаимодействием всех рынков.

**Ключевые слова:** циклическая динамика; модель Гудвина; кейнсианская модель равновесия; теория рефлексивности; рынок труда; бифуркация

**Ссылка при цитировании:** Корнейчук Б.В. Циклическая динамика и бифуркации на рефлексивных рынках // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. 2017. Т. 10, № 3. С. 26–37. DOI: 10.18721/JE.10302

## CYCLIC DYNAMICS AND BIFURCATIONS ON REFLEXIVE MARKETS

**B.V. Korneychuk**

National Research University Higher School of Economics, St. Petersburg, Russian Federation

In the midst of crisis and growing uncertainty of economic development, it's becoming ever more important to investigate economic cycles and bifurcation states where small regulatory changes can give the dynamic process completely different properties. The

research methodology is based upon three principles that enabled the author to develop a new cyclical behavior model and examine the cyclicity factors other than those in the Goodwin cycle model. The inductive approach relies on the universal pattern of the relationship between economic variables and rules out incorporating additional theoretical assumptions. As opposed to the deductive approach, empirical assessment of indicators is determined before the analysis of the model and has a decisive impact on the nature of the conclusions. The principle of reflexivity means that the subjects of a particular market are at the same time objects affected by another one. This principle is implemented in the assumption that demand and supply functions in every market depend both on the price and the change of all prices. The principle of linearity establishes a linear relationship between endogenous variables and their derivatives and allows to examine cyclic processes and bifurcation states by way of a relatively simple system of first-order linear differential equations which includes the conditions of the Keynesian equilibrium and the labor market equilibrium. The paper develops the theoretical and instrumental framework for a reflexive model of economic dynamics, provides analysis thereof for the case of two and three related markets, determines the cyclicity conditions and the characteristics of bifurcation states, and examines the nature of the dynamics of macroeconomic variables. A number of conclusions stem from the study. Firstly, the model has shown its efficiency in analyzing cycles in reflexive markets, with the simplifying assumption that the functions are linear not becoming an obstacle to describing and exploring various types of dynamics and bifurcation states. Secondly, exogenous parameters of the model can be identified empirically prior to its analysis, which allows to address the distinctive features of dynamic processes with an eye on the institutional character of economic systems. Due to the linear nature of the model, it is possible to make calculations using regression analysis methods based on publicly available monitoring data, which increases the practical relevance of the model. Thirdly, the model allows for generalization for an arbitrary number of reflexive markets, an important line of future research being the study of a four-dimensional model with a foreign-exchange market as well as a global model of the world economy with a reflexive relationship between all markets.

**Keywords:** cyclic dynamics; Goodwin model; Keynesian equilibrium model; reflexivity theory; market labor; bifurcation

**Citation:** B.V. Korneychuk, Cyclic dynamics and bifurcations on reflexive markets, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics, 10 (3) (2017) 26–37. DOI: 10.18721/JE.10302

*Введение.* В условиях системного кризиса и усиливающейся неопределенности экономического развития возрастает актуальность изучения и прогнозирования циклических процессов. Циклические модели остаются актуальным инструментом принятия решений для субъектов финансовых рынков, поскольку наряду с техническим анализом и другими методами позволяют прогнозировать экономическую конъюнктуру и тем самым повышать прибыльность вложений. Особую ценность представляют модели рассмотренного в статье вида, которые позволяют относительно простыми методами реализовать компьютерную имитацию реальных процессов. Для субъектов экономической политики, действующих в условиях высокой неопределенности, особую актуальность представляют состояния бифуркации, в которых слабое регулирующее воздействие способно коренным образом изменить характер экономического развития страны.

В начале прошлого века российская экономическая мысль находилась в авангарде исследований хозяйственных циклов, благодаря фундаментальному труду ученого-политехника М.И. Туган-Барановского [5] и результатам исследования его ученика Н.Д. Кондратьева [3], который статистическими методами доказал существование длинных волн экономической конъюнктуры. В советский период исследования циклов фактически не проводились, и в настоящее время перед российскими экономистами стоит задача включиться в это направление исследований, которому посвящены тысячи научных статей и ряд специализированных изданий. Методологической основой современной теории циклов служит подход Р. Гудвина [16], который предполагает постулирование функциональных связей между экономическими показателями и их изменениями (производными) и построение на базе этих постулатов системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику

показателей. Наряду с традиционными исследованиями модели Гудвина [12, 14, 23] мы выделяем три основных направления ее развития. Первое состоит в последовательном усложнении математического инструментария базовой модели, которая изначально сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений типа Лотка–Вольтерра, известной своей технической сложностью [6]. Как следствие, новые модификации модели все сильнее отрываются от реальных хозяйственных процессов, теряют свое экономическое содержание и практическую значимость [1, 24]. Странники второго направления стремятся синтезировать классическую модель Гудвина в единую модель с другими экономическими теориями: концепцией трудовой резервной армии К. Маркса, кейнсианской теорией и теорией инноваций Й. Шумпетера [15], моделью Калецки и теорией олигополистических рынков [25], теориями производственных функций и технического прогресса [29]. Третье направление исследований делает акцент на эмпирико-статистическом обосновании теоретических моделей [7, 18]. Стремление ученых к техническому усложнению, широкому синтезу или эмпиризму в ущерб простоте и прозрачности теоретических построений и выводов приводит, на наш взгляд, к дефициту моделей, способных учитывать слабо формализуемые социальные факторы, связанные с поведением субъектов рынка труда. В то время как в ряде случаев такие факторы могут определять и само существование циклов и значимые параметры динамических процессов. Лишь в немногих работах особенности рынка труда успешно интегрированы в модель циклической динамики [13]. Сложный технический инструментарий современных моделей циклической динамики препятствует применению на практике понятия «бифуркация» (раздвоение) как особого состояния экономической системы, в котором малые приращения регулируемых параметров способны обеспечить динамическому процессу два принципиально различных направления.

*Методика и результаты исследования.* Методика базируется на трех основных принципах.

*Принцип эмпиризма* противостоит доминирующему дедуктивному подходу, который позволяет неограниченно генерировать модели

на основе произвольных теоретических постулатов, при этом эмпирические исследования носят вторичный характер и призваны подтвердить или опровергнуть выводы модели. Эмпирический подход, наоборот, опирается на универсальную теоретическую схему линейных взаимосвязей экономических переменных и исключает введение новых теоретических предположений, при этом выводы модели и их теоретическое осмысление зависят не от теоретических постулатов, а от эмпирических оценок экзогенных показателей, которые носят первичный характер и могут быть достоверно установлены до начала анализа модели.

*Принцип рефлексивности* означает, что субъекты одного рынка являются одновременно объектами воздействия другого рынка, а поэтому экономические показатели невозможно разделить на независимые переменные и их функции [4, 27]. Эта проблема, которая служит препятствием для интеграции принципа рефлексивности в традиционные модели динамики, ученые решают с использованием рекурсивных уравнений [19], методов статистики [22], а также в рамках политико-экономического и социологического подходов [10, 26, 30]. Принцип рефлексивности реализован нами в рамках базовой гипотезы о том, что функции спроса и предложения на каждом рынке зависят не только от данной цены, но и от изменений в единицу времени (производных) всех цен. Такого рода функции успешно применяются для анализа рыночных колебаний [11]. Следуя принципу рефлексивности, мы построили систему дифференциальных уравнений, описывающую состояние динамического равновесия системы рынков.

*Принцип линейности* предполагает постулирование линейной зависимости между базовыми показателями модели, он основан на традиции априорной линеаризации экономических функций, заложенной российской экономико-математической школой в модели межотраслевого баланса [20] и теории линейного программирования [2]. Принцип линейности позволил нам исследовать циклические процессы на основе решения относительно простой системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. На ее основе были исследованы состояния глобальной бифуркации, что

восполняет пробел в современных исследованиях, поскольку в большинстве работ рассматриваются нелинейные модели и имманентная им локальная бифуркация [8, 21], а исследования глобальной бифуркации являются скорее исключением [9].

Использование изложенных методологических принципов позволило нам разработать принципиально новую модель циклической динамики и исследовать факторы цикличности, отличные от традиционных факторов в модели Гудвина, которые нередко называют псевдогудвиновскими [28]. Цель данного исследования – разработка методологических и инструментальных основ рефлексивной модели циклической динамики, проведение анализа модели для случаев двух и трех взаимосвязанных рынков, определение условий цикличности, выявление предпосылок и особенностей состояний бифуркации, исследование характера динамики ряда экономических показателей.

**Построение двумерной модели рефлексивных рынков.** Рынок агрегированного продукта, описываемый кейнсианской моделью  $AD-AS$ , мы рассматриваем в тесной связи с рынком труда. Функции совокупного спроса  $AD$  и совокупного предложения  $AS$  линейно зависят от дефлятора (цены)  $p$  и прироста ставки заработной платы в единицу времени  $\dot{w}$ , а спрос на труд  $DL$  и его предложение  $SL$  линейно зависят от ставки заработной платы  $w$  и прироста цены  $\dot{p}$ . Тогда условие общего равновесия выражается системой

$$AD(p, \dot{w}) = AS(p, \dot{w}); \quad (1)$$

$$DL(w, \dot{p}) = SL(w, \dot{p}). \quad (2)$$

Экономика рассматривается на нисходящем участке кривой предложения труда, а ее эластичность по ставке заработной платы считаем небольшой, что согласуется с эмпирическими наблюдениями. Тогда условие равновесия выражается системой линейных дифференциальных уравнений с положительными экзогенными параметрами:

$$(a_1 - b_1 p) + \alpha_1 \dot{w} = (d_1 p - c_1) - \beta_1 \dot{p}; \quad (3)$$

$$(a_2 - b_2 w) + \alpha_2 \dot{p} = (c_2 - d_2 w) + \beta_2 \dot{w}, \quad (4)$$

где коэффициенты рефлексивности  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  характеризуют внешнюю чувствительность рынков, а знаки перед ними определяются неценовыми факторами спроса и предложения. Запишем систему в матричной форме и в форме системы:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_2 - d_2}{\alpha_2 - \beta_2} \\ \frac{b_1 + d_1}{\alpha_1 + \beta_1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a_2 - c_2}{\alpha_2 - \beta_2} \\ \frac{a_1 + c_1}{\alpha_1 + \beta_1} \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{b_2 - d_2}{\alpha_2 - \beta_2} w - \frac{a_2 - c_2}{\alpha_2 - \beta_2}, \\ \dot{w} = \frac{b_1 + d_1}{\alpha_1 + \beta_1} p - \frac{a_1 + c_1}{\alpha_1 + \beta_1}. \end{cases} \quad (5')$$

Динамический процесс, описываемый системой (5), имеет циклический характер в случае, когда корни характеристического уравнения имеют комплексные значения ( $\pm\theta i$ ), отсюда получаем условие цикличности:

$$(b_2 - d_2)(\alpha_2 - \beta_2) < 0. \quad (6)$$

Из условия цикличности следует, что наличие или отсутствие циклов на исследуемых рынках зависит лишь от особенностей рынка труда и не зависит от свойств функций совокупного спроса и предложения. Поскольку эластичность предложения труда низка ( $d_2 \approx 0$ ), то условие цикличности сводится к неравенству  $\alpha_2 < \beta_2$ , т. е. циклы возникают лишь в тех случаях, когда в силу высокой инерционности производственных процессов работодатели менее чувствительны к изменению уровня цен, по сравнению с аналогичной реакцией работников.

Продифференцируем второе уравнение системы (5') по времени и подставим полученное равенство в первое уравнение этой системы:

$$\ddot{w} = \frac{b_1 + d_1}{\alpha_1 + \beta_1} \dot{p};$$

$$\ddot{w} = \frac{b_1 + d_1}{\alpha_1 + \beta_1} \left( \frac{b_2 - d_2}{\alpha_1 - \beta_2} w - \frac{a_2 - c_2}{\alpha_2 - \beta_2} \right);$$

$$\ddot{w} - \frac{(b_1 + d_1)(b_2 - d_2)}{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)} w = \frac{(b_1 + d_1)(c_2 - a_2)}{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)}.$$

С учетом соотношения (6) циклическая динамика ставки заработной платы описывается уравнением

$$\dot{w} + \theta^2 w = e_1. \quad (7)$$

Теперь продифференцируем первое уравнение системы (5) по времени и подставим полученное равенство во второе уравнение этой системы. Повторив описанные выше преобразования, получим уравнение циклической динамики дефлятора:

$$\ddot{p} + \theta^2 p = e_2. \quad (8)$$

Решение системы (7) и (8) есть эллипс, или базовая траектория динамики:

$$\theta^2 (w - w^*)^2 + (p - p^*)^2 = R^2. \quad (9)$$

Показатель  $\theta$  определяет частоту циклических колебаний и амплитуду колебаний ставки заработной платы, а амплитуда колебаний дефлятора зависит от начальных условий. Равновесные цены обозначены:  $p^*$ ,  $w^*$ . Реальная ставка заработной платы  $\omega = w/p$  равна тангенсу угла наклона отрезка, проведенного из начала координат в точку эллипса; она принимает крайние значения в точках касания отрезка и эллипса. Несложно показать, что темп инфляции принимает максимальное и минимальное значения при уровне цен, меньшем равновесного, что свидетельствует об асимметричном характере динамики. Таким образом, модель лишена недостатка модели Гудвина, которая не учитывает асимметричные свойства реальных значений ставки заработной платы и дохода и которую пытались преодолеть ученые [17]. Характер циклической динамики зависит от формы эллипса. Если он вытянут вдоль оси «дефлятор», то состояния экономики с максимальной реальной ставкой заработной платы и минимальным уровнем цен расположены близко, так же как и состояния с минимальной реальной ставкой и максимальным уровнем цен, а колеблемость реальных доходов невелика. Если он вытянут вдоль оси «ставка заработной платы», то состояния с максимальной номинальной ставкой и максимальной реальной ставкой расположены близко, так же как состояния с минимальной номинальной ставкой и минимальной реальной ставкой, при этом колеблемость реальных доходов велика.

**Анализ двумерной модели рефлексивных рынков.** Определим условия существования точек бифуркации и типы циклической динамики.

На рынке продукта равновесный выпуск  $y$  равен значению  $AD$  и  $AS$  в уравнении (3). Приравняем правую часть (3) к  $y$  и получим:

$$(d_1 p - c_1) - \beta_1 \dot{w} = y,$$

$$\dot{w} = \frac{d_1}{\beta_1} p - \frac{c_1}{\beta_1} - \frac{y}{\beta_1}.$$

Подставим последнее выражение в левую часть (3), равную  $y$ , и получим:

$$y = (a_1 - b_1 p) + \alpha_1 \dot{w};$$

$$y = a_1 - b_1 p + \alpha_1 \left( \frac{d_1}{\beta_1} p - \frac{c_1}{\beta_1} - \frac{y}{\beta_1} \right).$$

Отсюда получаем выпуск  $y$  как линейную функцию дефлятора:

$$y = \frac{\alpha_1 d_1 - \beta_1 b_1}{\alpha_1 + \beta_1} p + \frac{\beta_1 a_1 - \alpha_1 c_1}{\alpha_1 + \beta_1}; \quad (10)$$

$$y = \delta p + y_0. \quad (11)$$

Из (11) следует  $\dot{y} = \delta \dot{p}$ , а поэтому максимальный и минимальный приросты выпуска достигаются при максимальном или минимальном темпе инфляции, причем показатель  $\delta$  характеризует чувствительность выпуска к изменению уровня цен и может иметь разный знак. Из (10) следует, что на кейнсианском участке  $AS$  значение  $\delta$  бесконечно. В целом, показатель  $\delta$  зависит не только от наклона  $AS$ , но также от наклона  $AD$  и коэффициентов рефлексивности, однако при прочих равных условиях его величина определяется наклоном  $AS$ , т. е. уровнем занятости. Поэтому рынки с положительным значением  $\delta$  мы называем рынками с низкой занятостью, а с отрицательным — рынками с высокой занятостью.

Бифуркация есть состояние рынка продукта с нулевым значением  $\delta$ . Из (10) следует, что на рынке продукта возникает бифуркация, если угловые коэффициенты кривых спроса и предложения пропорциональны соответствующим коэффициентам рефлексивности. Тогда любое изменение равновесной

ставки зарплаты приводит к таким сдвигам кривых  $AS$  и  $AD$ , что новое равновесие достигается при первоначальном равновесном выпуске и новой цене. Существование точки бифуркации в рефлексивной модели  $AD-AS$  означает, что абсолютная неэластичность выпуска к уровню цен имеет место не только на классическом участке  $AS$  при полной занятости, но также возможна в особой точке на ее наклонном участке при неполной занятости.

Значение показателя  $\delta$  можно трактовать как результат политики правительства, направленной на изменение уровня цен. При низкой занятости  $\delta$  положителен, выпуск и уровень цен достигают максимума или минимума одновременно, а стимулирующая монетарная политика приводит к экономическому росту. При высокой занятости  $\delta$  отрицателен, выпуск достигает максимума при минимальном уровне цен, и поэтому стимулирующая монетарная политика приводит к спаду. В точке бифуркации и вблизи нее политика воздействия на выпуск посредством изменения уровня цен неэффективна, а выпуск может регулироваться лишь посредством параллельных сдвигов кривых спроса и предложения. Поэтому если правительство стремится приблизить рынок к состоянию бифуркации, то его действия должны приводить к изменению кривых совокупного спроса и предложения.

Определим условия бифуркации на рынке труда при циклической динамике. На рынке труда равновесный объем занятости  $L$  равен значению  $DL$  и  $DS$  в уравнении (4). Приравняем правую часть (4) и  $L$  и повторим описанные выше преобразования при выводе формулы (10); в итоге выразим численность занятых как линейную функцию ставки зарплаты:

$$L = \frac{\beta_2 b_2 - \alpha_2 d_2}{\alpha_2 - \beta_2} w + \frac{\alpha_2 c_2 - \beta_2 a_2}{\alpha_2 - \beta_2}; \quad (12)$$

$$L = \gamma w + L_0. \quad (13)$$

Из (12) следует условие бифуркации на рынке труда:

$$\beta_2 b_2 = \alpha_2 d_2. \quad (14)$$

При сделанных предположениях бифуркация на рынке труда невозможна, поскольку

условие (14) несовместимо с условием цикличности (6). Из (13) следует  $\dot{L} = \gamma w$ , а поэтому максимальная занятость достигается при минимальной ставке зарплаты, а минимальная занятость — при максимальной ставке. Уравнения (11) и (13) позволяют рассматривать выпуск и занятость как систему функций  $y(p, w), L(p, w)$ , якобиан которой равен нулю при бифуркации на рынке продукта:

$$J = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}.$$

Существование бифуркации на рынке продукта позволяет разделить показатели динамики на два типа. Динамика показателей первого типа не зависит от наличия или отсутствия бифуркации: это дефлятор  $p$ , ставка  $w$  и производные от них — темп инфляции  $\pi$ , реальная ставка  $\omega$ , численность занятых  $L$ . Динамика показателей второго типа зависит от  $\delta$ : это выпуск  $y$ , доля труда в выпуске  $\psi = (wL) / (py)$ , продуктивность труда  $x = y / L$ .

Традиционно экономисты акцентируют внимание на динамике показателей  $y$  и  $\psi$ , исследуемых в модели Гудвина. Формула (9) позволяет получить иную формулу, связывающую эти показатели. Рассмотрим частные случаи. Во-первых, исследуем динамику показателей  $y$  и  $\omega$ , для чего получим с помощью (11) и определения реальной ставки зарплаты два вспомогательных равенства:

$$p = (y - y_0) / \delta, \quad w = \omega p = (y - y_0)\omega / p.$$

Подставим эти равенства в (9), получим:

$$\theta^2 \left( \frac{(y - y_0)\omega}{\delta} - w^* \right)^2 + \left( \frac{y - y_0}{\delta} - p^* \right)^2 = R^2.$$

Умножив обе части этого равенства на  $\delta^2$ , получим окончательное соотношение:

$$\theta^2 (\omega y - \omega y_0 - \delta w^*)^2 + (y - y_0 - \delta p^*)^2 = (\delta R)^2. \quad (15)$$

При  $\delta$  больше нуля, т. е. уровень занятости низок, выпуск и реальная ставка растут и падают одновременно. Если  $\delta$  меньше нуля и уровень занятости высок, при росте выпуска реальная ставка снижается, и наоборот.

В точке бифуркации выпуск неизменен, а базовая траектория динамики вырождается в вертикальный отрезок. Если начальная занятость низка, а наклон кривой  $AS$  растет, то после прохождения точки бифуркации эллипс зеркальное отображается относительно оси  $\omega$ , а точка изменяет направление своего движения на противоположное.

Динамику доли зарплаты в доходе ( $\psi$ ) исследуем при помощи функций, заданных уравнениями (7) и (8). Из (11) и (13) получим функцию

$$\psi = \frac{wL}{py} = \frac{\gamma w^2 + L_0 w}{\delta p^2 + y_0 p}. \quad (16)$$

Исследуем ее производную в вершинах базовой траектории и выделим шесть основных типов динамики доли зарплаты, которые характеризуются эластичностью кривых предложения продукта и труда. Рассмотрим рынки продукта с разным наклоном кривых совокупного предложения  $d_1$ , который определяет уровень занятости: чем он больше, тем меньше  $\delta$  и ниже занятость. Назовем функцию выпуска  $y(p)$  сильно убывающей, а занятость низкой, если параметр  $\delta$  отрицателен и меньше  $-y_0 / 2p^*$ . Назовем ее умеренно убывающей, а занятость средней, если параметр  $\delta$  отрицателен и больше  $-y_0 / 2p^*$ . Если параметр  $\delta$  положителен, то функция выпуска возрастает, а занятость назовем высокой. Тогда рынок продукта с бифуркацией есть промежуточное состояние между рынками со средней занятостью и высокой занятостью.

Рассмотрим рынки труда с разным наклоном кривых предложения  $d_2$ . На убывающем участке с ростом цены труда эластичность предложения труда растет по модулю, и угол ее наклона определяет уровень оплаты: чем больше  $d_2$  и чем больше  $\gamma$ , тем выше уровень зарплаты. Назовем функцию занятости  $L(w)$  сильно убывающей, а уровень зарплаты низким, если параметр  $\gamma$  меньше  $-L_0 / 2w^*$ . Назовем функцию занятости  $L(w)$  слабо убывающей, а уровень зарплаты высоким, если параметр  $\gamma$  отрицателен и больше  $-L_0 / 2w^*$ . На рынках с низкой оплатой труда доля зарплаты максимальна в точке цикла с зарплатой ниже равновесного значения и

минимальна в точке цикла с зарплатой выше равновесного значения.

Из предыдущих рассуждений следует, что возможны три варианта расположения точек экстремума выпуска и доли зарплаты при низком уровне зарплаты. При низкой и умеренной занятости доля зарплаты максимальна в период экономического спада и минимальна в период подъема, что соответствует последовательности стадий экономического цикла в модели Гудвина. Различие между этими случаями состоит в том, что значения реальной зарплаты в моменты цикла с максимальной и минимальной долями зарплаты сильнее различаются на рынках с низкой занятостью, по сравнению с рынками с умеренной занятостью. После прохождения рынком продукта точки бифуркации и достижения состояния высокой занятости последовательность стадий цикла изменяется.

Возможны также три варианта расположения точек экстремума выпуска и доли зарплаты при высоком уровне зарплаты. На таких рынках доля зарплаты максимальна в точке цикла с зарплатой выше равновесного значения и минимальна в точке цикла с зарплатой ниже равновесного значения. При низкой и умеренной занятости доля зарплаты максимальна в период экономического роста и минимальна в период спада. Различие между этими случаями состоит в том, что значения реальной зарплаты в моменты цикла с максимальной и минимальной долями зарплаты сильнее различаются на рынках с умеренной занятостью, по сравнению с рынками с низкой занятостью. После прохождения рынком продукта точки бифуркации и достижения состояния высокой занятости последовательность стадий цикла изменяется и приходит в соответствие с моделью Гудвина.

Закключаем, что последовательность стадий цикла, характерных для модели Гудвина, в нашей модели наблюдается лишь в трех типах динамики из шести. Модели Гудвина противоречат случаи, когда зарплата и уровень безработицы являются одновременно низкими или высокими. Поскольку высокой безработице обычно отвечает низкая зарплата, а низкой безработице — высокая, эти состояния являются нетипичными.

Продуктивность труда  $x$  в нашей модели есть функция дефлятора и цены труда и поэтому является циклическим показателем:

$$x = \frac{y}{L} = \frac{\delta p + y_0}{\gamma w + L_0}.$$

Исследовав производную  $x$  в вершинах базовой траектории, мы заключаем, что *при любом уровне занятости продуктивность максимальна при ставке зарплаты выше равновесного уровня и минимальна при ставке ниже равновесного уровня*. Возможны три варианта расположения экстремальных точек продуктивности: при низкой занятости она максимальна вблизи точки с максимальным уровнем цен, а при высокой занятости — вблизи точки с минимальным уровнем цен. При бифуркации на рынке продукта крайние значения продуктивности труда и ставки зарплаты достигаются одновременно.

**Построение и анализ трехмерной модели рефлексивных рынков.** Введем в рассмотрение рынок денег. Спрос и предложение на рынках продукта, труда и денег линейно зависят от прироста всех трех цен, тогда условие общего равновесия есть система трех линейных дифференциальных уравнений. В отличие от аналогичной двумерной системы (5) знаки количественных параметров здесь мы считаем априори неизвестными и требующими эмпирического определения:

$$s_{11}\dot{p} + s_{12}\dot{w} + s_{13}\dot{r} = m_1 p - n_1; \quad (17)$$

$$s_{21}\dot{p} + s_{22}\dot{w} + s_{23}\dot{r} = m_2 w - n_2; \quad (18)$$

$$s_{31}\dot{p} + s_{32}\dot{w} + s_{33}\dot{r} = m_3 r - n_3, \quad (19)$$

где  $s_{ij}$  — чувствительность  $i$ -го рынка к изменению цены на  $j$ -м рынке;  $r$  — ставка процента.

Запишем систему в матричной форме, полагая  $\det S \neq 0$ :

$$\dot{P} = Q \times P - S^{-1} \times N, \quad (20)$$

где матрица  $Q = S^{-1} \times M$  определяет характер динамики,  $P(p, w, r)$ ,  $N = (n_1, n_2, n_3)$ ;  $M$  — диагональная матрица с диагональю  $(m_1, m_2, m_3)$ .

Из (20) следует, что единственное стационарное состояние существует при условии  $\det Q \neq 0$ , а стационарные цены определяются по формуле

$$P^* = Q^{-1} \times S^{-1} \times N. \quad (21)$$

При заданной матрице  $S$  элементы матрицы  $Q$  могут изменяться под влиянием внешних регулирующих воздействий, изменяющих наклон кривых спроса и предложения. Динамика цен циклична, если характеристическое уравнение  $\det(Q - \lambda E) = 0$  имеет комплексные решения.

Определим условия бифуркации на одном рынке. На рынке продукта равновесный выпуск выражается функцией цены продукта и линейной комбинацией приростов цен. Прирост каждой цены согласно (20) есть линейная функция цен, поэтому выпуск есть линейная функция цен  $y(p, w, r)$ .

Условие бифуркации на рынке продукта есть одновременное равенство нулю всех частных производных этой функции:

$$A_1 \times Q = B_1, \quad (22)$$

где  $A_1 = (\alpha_1^p, \alpha_2^p, \alpha_3^p)$  — коэффициенты рефлексивности функции совокупного спроса, равные ее частным производным по приростам (производным) дефлятора, ставки зарплаты и ставки процента соответственно;  $B_1 = (b_1, 0, 0)$ , где  $b_1$  — ее угловой коэффициент.

Условия бифуркации на рынках труда и денег аналогичны:

$$A_2 \times Q = B_2; \quad (23)$$

$$A_3 \times Q = B_3, \quad (24)$$

где  $A_2 = (\alpha_1^w, \alpha_2^w, \alpha_3^w)$ ,  $A_3 = (\alpha_1^r, \alpha_2^r, \alpha_3^r)$  — векторы коэффициентов рефлексивности кривых спроса на рынке труда и денег соответственно;  $B_2 = (0, b_2, 0)$ ,  $B_3 = (0, 0, b_3)$ , где  $b_2$  и  $b_3$  — угловые коэффициенты этих кривых.

Если целью экономической политики является достижение состояния бифуркации на рынке продукта, то уравнение (22) позволяет рассчитать требуемые значения регулируемых параметров. Если объектами регулирования являются кривые спроса, а кривые предложения неизменны, то (22) есть система трех линейных уравнений относительно  $b_1, b_2, b_3$ . Если объектами регулирования являются кривые предложения, то следует определить значения  $d_1, d_2, d_3$ . Аналогично, уравнения (23) и (24) позволяют рассчитать значения регулируемых параметров, обеспечивающих переход в состояние бифуркации рынка труда и рынка

денег соответственно. Таким образом, состояние бифуркации на одном рынке достижимо.

Если целью экономической политики является достижение состояния бифуркации одновременно на рынке продукта и рынке труда, тогда регулируемые параметры являются решениями системы шести линейных уравнений (22) и (23). Цель достижима при условии, что объектами регулирования являются кривые спроса и предложения, а точнее, параметры  $b_1, b_2, b_3$  и  $d_1, d_2, d_3$ . Таким образом, состояние бифуркации одновременно на двух рынках достижимо. Если целью экономической политики является достижение состояния бифуркации одновременно на трех рынках, тогда шесть регулируемых параметров удовлетворяют системе девяти линейных уравнений. Цель достижима, а система регулируемых параметров единственна.

Обозначим вектор  $\Omega^i = A_i \times Q - B_i$  и представим выпуск в виде линейной функции цен. Запишем аналогичные уравнения для численности занятых и денежной массы и получим общее уравнение динамики:

$$Y = J \times P + Y_0,$$

где  $Y = (y, L, M)$ ,  $Y_0 = (y_0, L_0, M_0)$ ;  $J$  — якобиан для функций  $y, L, M$ ,

$$J = \begin{pmatrix} \Omega_1^1 & \Omega_2^1 & \Omega_3^1 \\ \Omega_1^2 & \Omega_2^2 & \Omega_3^2 \\ \Omega_1^3 & \Omega_2^3 & \Omega_3^3 \end{pmatrix}.$$

При бифуркации на рынке продукта равна нулю первая строка якобиана, при бифуркации на рынке труда — вторая, на рынке денег — третья. При бифуркации на трех рынках якобиан есть нулевая матрица. Это возможно, если векторы  $A_1, A_2, A_3$  коллинеарны, тогда показатели чувствительности спроса и предложения к изменению цен на всех рынках пропорциональны. Сложив три условия бифуркации, получим необходимое условие глобальной бифуркации системы для системы произвольного количества рынков:

$$A \times Q = B,$$

где вектор  $B$  есть сумма  $b_i$ , вектор  $A$  есть сумма  $A_i$ . В этом состоянии выпуск, занятость и денежная масса неизменны, в то

время как уровень цен, ставка зарплаты, ставка процента и доля труда в доходе изменяются циклически.

*Выводы.* Предложенная модель динамики показала свою применимость при анализе экономических циклов и состояний бифуркации на рефлексивных рынках. Упрощающие предположения о линейном виде функций спроса и предложения не стали препятствием для описания и исследования с помощью полученной системы дифференциальных уравнений разнообразных типов циклической динамики, включая состояния глобальной бифуркации;

При рефлексивном подходе к моделированию динамических процессов задача исследователя состоит не в построении все более сложных в техническом отношении моделей, а в накоплении больших объемов статистических данных для получения достоверных значений экзогенных параметров еще до начала анализа модели и формулировки практически значимых выводов. Такой подход позволяет учитывать разнообразные особенности динамических процессов с учетом специфики экономических систем. Поскольку характер динамических процессов различается в различных странах в различные периоды времени, эмпирические значения параметров окажутся зависимыми от экономических, исторических и политических условий;

Достоинством предложенной модели является простота расчета экзогенных параметров дифференциальных уравнений, которая обусловлена их линейным видом. Эндогенными параметрами системы (17)–(19) служат наблюдаемые показатели (рыночные цены и их изменения), в отношении которых службами официальной статистики проводится постоянный мониторинг. Поэтому методы корреляционно-регрессивного анализа позволяют оперативно получать достоверные значения экзогенных параметров этой системы;

Модель может быть обобщена на случай произвольного количества рефлексивных рынков. В частности, следующим шагом исследования может служить построение четырехмерной модели посредством введения в рассмотрение валютного рынка, на котором функции спроса и предложения зависят не

только от валютного курса, но также от изменений в единицу времени самого курса, а также дефлятора, ставки зарплаты и ставки процента. Предложенный подход продуктивен также при моделировании динамических

процессов в мировой экономике, поскольку в условиях глобализации рынки разных стран являются тесно взаимосвязанными и поэтому могут быть исследованы в рамках рефлексивной модели.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Екатеринчук Е.Д., Рязанова Т.В., Ряшко Л.Б.** Индуцированные шумом переходы в модели бизнес-циклов Гудвина // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. № 6(186). С. 117–125.
- [2] **Канторович Л.В.** Экономика и математика. СПб.: Нестор-История, 2012. 364 с.
- [3] **Кондратьев Н.Д.** Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. М.: Альма Матер, Академический проект, 2015. 638 с.
- [4] **Сорос Д.** Алхимия финансов. М.: Диалектика, 2013. 347 с.
- [5] **Туган-Барановский М.И.** Промышленные кризисы в современной Англии, их причины и ближайшие влияния на народную жизнь. СПб., 1894. 512 с.
- [6] **Шишкин Г.А.** Линейные краевые задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра с функциональными запаздываниями. Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2015. 76 с.
- [7] **Barbosa-Filho N., Taylor L.** Distributive and demand cycles in the US economy – a structuralist Goodwin model // *Metroeconomica*. 2006. No. 57. P. 389–411.
- [8] **Bella G.** Multiple cycles and the Bautin bifurcation in the Goodwin model of a class struggle // *Nonlinear Analysis: Modeling and Control*. 2013. Vol. 18, no. 3. P. 265–274.
- [9] **Bischi G.I., Gardini L., Kopel M.** Analysis of global bifurcations in a market share attraction model // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2000. No. 24. P. 855–879.
- [10] **Bryant C.G.** George Soros's theory of reflexivity: A comparison with the theories of Giddens and Beck and a consideration of its practical value // *Economy and Society*. 2002. No. 31. P. 112–131.
- [11] **Caginalp G., Belenovich D.** Market oscillations induced by the competition between value-based and trend-based investment strategies // *Applied Mathematical Finance*. 1994. No. 1. P. 129–164.
- [12] **Flaschel P., Kauermann G., Teuber T.** Long cycles in employment, inflation and unit wage cost, qualitative analysis and quantitative assessment // *American Journal of Applied Sciences*. 2005. No. 2. P. 69–77.
- [13] **Flaschel P., Malikane C.** Segmented labor markets, distributive cycles and an employer of last resort. Bielefeld University: CEMM Working paper, 2011.
- [14] **Flaschel P., Greiner A., Logeay C., Proano C.** Employment cycles, low income work and the dynamic impact of wage regulations. A macro perspective // *Journal of Evolutionary Economics*. 2012. Vol. 2. P. 235–250.
- [15] **Flaschel P.** Goodwin MKS system: a baseline macro model // *Cambridge Journal of Economics*. 2015. Vol. 39, no. 6. P. 1591–1605.
- [16] **Goodwin R.M.** A growth cycle // *Feinstein C.H. ed. Socialism, Capitalism and Economic Growth*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967. P. 54–58.
- [17] **Harvie D., Kelmanson M.A., Knapp D.G.** A dynamic model of business-cycle asymmetries: extending Goodwin // *Economic Issues*. 2007. No. 12. P. 53–92.
- [18] **Konstantakis K., Michaelides P.G., Marilios A.** An endogenous Goodwin-Keynes business cycle model: evidence for Germany (1991–2007) // *Applied Economics Letters*. 2014. Vol. 21, no. 7. P. 481–486.
- [19] **Kwong C.P.** Mathematical analysis of Soros's theory of reflexivity. Cornell University Library, 2009. URL: <http://arxiv.org/abs/0901.4447> (accessed April 07, 2017).
- [20] **Leontief W.** *Input-Output Economics*. New York: Oxford University Press, 1966. 436 p.
- [21] **Markakis M.P., Douris P.S.** Stability and analytical approximation of limit cycles in Hopf bifurcations of four-dimensional economic models // *Applied Mathematical Science*. 2014. Vol. 8, no. 80. P. 3697–3990.
- [22] **Palatella L.** A reflexive toy-model for financial market // *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. 2010. No. 389. P. 315–322.
- [23] **Rezai A.** Goodwin cycles, distributional conflict and productivity growth // *Metroeconomica*. 2012. No. 63. P. 29–39.
- [24] **Rodousakis N.** The stability properties of Goodwin's growth cycle model with a variable elasticity of substitutional production function // *Studies in Microeconomics*. 2014. Vol. 2, no. 2. P. 213–223.
- [25] **Sasaki H.** Cyclical growth in a Goodwin-Kalecki-Marx model // *Journal of Economics*. 2013. Vol. 108, no. 2. P. 145–171.
- [26] **Shaikh A.** Reflexivity, path dependence and disequilibrium dynamics // *Journal of Post Keynesian Economics*. 2010. No. 33. P. 3–16.
- [27] **Soros G.** The new paradigm for financial markets. The credit crisis of 2008 and what it means. New York: PublicAffairs, 2008. 238 p.

[28] **Stockhammer E., Michell J.** Pseudo-Goodwin cycles in a Minsky model // Post Keynesian Economics Study Group, 2014. Working Paper 1405. URL: <http://www.postkeynesian.net> (accessed April 07, 2017).

[29] **Tavani D., Zamparelli L.** Endogenous technical

change, employment and distribution in the Goodwin model of the growth cycle // Social and Economical Sciences. 2015. Vol. 19, no. 2. P. 209–226.

[30] **Umpleby S.** Reflexivity in social systems: the theories of George Soros // Systems Research and Behavioral Science. 2007. No. 24. P. 514–522.

**КОРНЕЙЧУК Борис Васильевич.** E-mail: [bkorneychuk@hse.ru](mailto:bkorneychuk@hse.ru)

*Статья поступила в редакцию 12.04.17*

## REFERENCES

[1] **Ye.D. Yekaterinchuk, T.V. Ryazanova, L.B. Ryashko,** Indutirovannyye shumom perekhody v modeli biznes-tsiklov Gudvina [Optimal reactive power compensation in distribution systems of electric energy], St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Informatics. Telecommunications. Management, 6 (186) (2013) 117–125.

[2] **L.V. Kantorovich,** Ekonomika i matematika [Economics and mathematics], St. Petersburg, Nestor-Istoriya, 2012.

[3] **N.D. Kondratyev,** Bolshiye tsikly konyunktury i teoriya predvideniya [Big cycles of conjuncture and theory of foresight], Moscow, Alma Mater, Akademicheskij proyekt, 2015.

[4] **D. Soros,** Alkhimiya finansov [Alchemy of finance], Moscow, Dialektika, 2013.

[5] **M.I. Tugan-Baranovskiy,** Promyshlennyye krizisy v sovremennoy Anglii, ikh prichiny i blizhayskiye vliyaniya na narodnyuyu zhizn [Industrial crises in contemporary England, their causes and immediate effects on people's life], St. Petersburg, 1894.

[6] **G.A. Shishkin,** Lineynyye krayevyye zadachi integrodifferentsialnykh uravneniy Volterra s funktsionalnymi zapazdyvaniyami [Linear boundary-value problems of Volterra integrodifferential equations with functional delays], Ulan-Ude, Izd-vo BGU, 2015.

[7] **N. Barbosa-Filho, L. Taylor,** Distributive and demand cycles in the US economy – a structuralist Goodwin model, Metroeconomica, 57 (2006) 389–411.

[8] **G. Bella,** Multiple cycles and the Bautin bifurcation in the Goodwin model of a class struggle, Nonlinear Analysis: Modeling and Control, 18 (3) (2013) 265–274.

[9] **G.I. Bischi, L. Gardini, M. Kopel,** Analysis of global bifurcations in a market share attraction model, Journal of Economic Dynamics and Control, 24 (2000) 855–879.

[10] **Bryant C.G.** George Soros's theory of reflexivity: A comparison with the theories of Giddens and Beck and a consideration of its practical value, Economy and Society, 31 (2002) 112–131.

[11] **G. Caginalp, D. Belenovich,** Market oscillations induced by the competition between value-based and trend-based investment strategies, Applied Mathematical Finance, 1 (1994) 129–164.

[12] **P. Flaschel, G. Kauermann, T. Teuber,** Long cycles in employment, inflation and unit wage cost, qualitative analysis and quantitative assessment, American Journal of Applied Sciences, 2 (2005) 69–77.

[13] **P. Flaschel, C. Malikane,** Segmented labor markets, distributive cycles and an employer of last resort. Bielefeld University: CEMM Working paper, 2011.

[14] **P. Flaschel, A. Greiner, C. Logeay, C. Proano,** Employment cycles, low income work and the dynamic impact of wage regulations. A macro perspective, Journal of Evolutionary Economics, 2 (2012) 235–250.

[15] **P. Flaschel,** Goodwin MKS system: a baseline macro model, Cambridge Journal of Economics, 39 (6) (2015) 1591–1605.

[16] **R.M. Goodwin,** A growth cycle, Feinstein C.H. ed. Socialism, Capitalism and Economic Growth, Cambridge, Cambridge University Press, 1967.

[17] **D. Harvie, M.A. Kelmanson, D.G. Knapp,** A dynamic model of business-cycle asymmetries: extending Goodwin, Economic Issues, 12 (2007) 53–92.

[18] **K. Konstantakis, P.G. Michaelides, A. Marillos,** An endogenous Goodwin-Keynes business cycle model: evidence for Germany (1991–2007), Applied Economics Letters, 21 (7) (2014) 481–486.

[19] **C.P. Kwong,** Mathematical analysis of Soros's theory of reflexivity. Cornwell University Library, 2009. URL: <http://arxiv.org/abs/0901.4447> (accessed April 07, 2017).

[20] **W. Leontief,** Input-Output Economics, New York, Oxford University Press, 1966.

[21] **M.P. Markakis, P.S. Douris,** Stability and analytical approximation of limit cycles in Hopf bifurcations of four-dimensional economic models, Applied Mathematical Science, 8 (80) (2014) 3697–3990.

[22] **L. Palatella,** A reflexive toy-model for financial market, Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 389 (2010) 315–322.

[23] **A. Rezaei,** Goodwin cycles, distributional conflict and productivity growth, Metroeconomica, 63 (2012) 29–39.

[24] **N. Rodousakis,** The stability properties of Goodwin's growth cycle model with a variable

elasticity of substitutional production function, *Studies in Microeconomics*, 2 (2) (2014) 213–223.

[25] **H. Sasaki**, Cyclical growth in a Goodwin-Kalecki-Marx model, *Journal of Economics*, 108 (2) (2013) 145–171.

[26] **A. Shaikh**, Reflexivity, path dependence and disequilibrium dynamics, *Journal of Post Keynesian Economics*, 33 (2010) 3–16.

[27] **G. Soros**, *The new paradigm for financial markets. The credit crisis of 2008 and what it means*, New York, PublicAffars, 2008.

[28] **E. Stockhammer, J. Michell**, Pseudo-Goodwin cycles in a Minsky model, Post Keynesian Economics Study Group, 2014. Working Paper 1405. URL: <http://www.postkeynesian.net> (accessed April 07, 2017).

[29] **D. Tavani, L. Zamparelli**, Endogenous technical change, employment and distribution in the Goodwin model of the growth cycle, *Social and Economical Sciences*, 19 (2) (2015) 209–226.

[30] **S. Umpleby**, Reflexivity in social systems: the theories of George Soros, *Systems Research and Behavioral Science*, 24 (2007) 514–522.

**KORNEYCHUK Boris V.** E-mail: [bkorneychuk@hse.ru](mailto:bkorneychuk@hse.ru)