



**Л.В. Кох, С.М. Булацкий**

**ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ПОТЕРЬ  
ОТ ОПЕРАЦИОННОГО РИСКА В КОММЕРЧЕСКОМ БАНКЕ**

**L.V. Kokh, S.M. Bulatsky**

**PROBLEMS OF MODELLING OPERATIONAL LOSS SEVERITY  
IN COMMERCIAL BANKING**

Возможное уменьшение величины требуемого регулятором собственного капитала является мотивирующим фактором для перехода банков к продвинутым подходам оценки операционного риска. Применение актуарного подхода потенциально полезно с точки зрения управления операционным риском. Подход к оценке на основе распределения потерь заслужил большую популярность в финансовых институтах по всему миру. Показано, почему частота и величина потерь на первом этапе должны моделироваться отдельно. Рассмотрены проблемы, связанные с моделированием величины потерь от событий операционного риска. Рассмотрена схема оценки операционного риска по методу LDA. Проведены аргументы в пользу использования как более сложных, так и более простых моделей. Проанализированы связи между распределениями, используемыми для моделирования операционного риска. Рассмотрены особенности данных о величине потерь от операционного риска – островершинность, асимметрия, наличие тяжелого хвоста. Введено определение «толстый хвост». Предложены графические процедуры для проведения первичного анализа выборки на наличие тяжелого хвоста. Обоснована необходимость применения сложных статистических моделей с двумя и более параметрами. Описаны теоретические аспекты применения двух основных методов теории экстремальных значений для моделирования операционного риска. Описана дилемма выбора порогового значения POT и проведен анализ четырех групп способов поиска этого значения. Рассматриваемые методы составляют достаточный аппарат для моделирования операционного риска. Указаны слабые места метода POT, предложено исследовать возможность применения обобщенных распределений для моделирования и оценки банковского операционного риска.

ОПЕРАЦИОННЫЙ РИСК; БАЗЕЛЬ II; МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРЬ; ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ; АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ.

A potential decrease in capital reservation required by the regulator motivates banks to use advanced approaches to operational risk assessment. The actuarial approach may also be useful from the standpoint of controlling the operational risks. The loss distribution approach, among others, is now considerably popular in banks all over the world. This paper shows why operational risk frequency and severity should be modeled separately under the LDA method and examines some problems regarding the modeling of operational loss severities. The study provides a complete scheme for using LDA. It gives arguments in support of using more complicated models against the simpler ones and vice versa as well. This paper analyses the connections between different distributions used to model operational risk. It emphasizes three distinctive features of operational risk data, i. e., skewness, kurtosis and a presence of the heavy tail. The notion of «fat tail» is re-introduced in comparison with the heavy tail. The article offers several graphical procedures to determine the presence of the heavy tail in a sample of operational risk data. Authors substantiate the need to use statistical models with two or more parameters. Theoretical aspects of EVT application to operational risk modeling are given. This study notes the POT method threshold choice dilemma and analyzes four different approaches to find the value of this threshold. The methods considered in this paper make up a powerful mathematical apparatus for operational risk modelling. However, some weak spots of the popular POT method are shown. Application of certain generalized models for operational risk modeling is suggested for further study.

OPERATIONAL RISK; BASEL II; LOSS MODELING; EXTREME VALUE THEORY; MODEL ANALYSIS.

*Введение.* Оценка рисков банковской деятельности – одна из наиболее сложных задач и с организационной и с математической то-

чек зрения. Авторы неоднократно обращались к этой проблеме, рассматривая вопросы, связанные с банковскими рисками и ин-

новационной деятельностью банка [4], или исследуя направления совершенствования системы управления банковскими рисками [5]. Из всего разнообразия рисков банковской деятельности мы выбрали операционный риск, потери от которого могут быть как незначительными, так и колоссальными, приводящими к банкротству банка [1, 3].

Согласно Базель II операционный риск представляет собой риск убытка в результате неадекватных или ошибочных внутренних процессов, действий сотрудников и систем или внешних событий. Это определение имеет универсальный характер, так как применимо для всего многообразия финансовых институтов. Кроме того, в определении сразу выделяются и источники операционного риска.

По замечаниям исследователей, по сравнению с другими финансовыми рисками, операционный риск сложно аккуратно измерить [8]. Нужные статистические данные, как правило, малочисленны, и модели получаются слишком чувствительными к аномалиям в поступающих данных, которые случаются довольно часто. Важным, на наш взгляд, является тот факт, что внутренние модели, полностью направленные на помощь в управлении риском, при этом создают для банков новую значительную неопределенность. Риск моделирования сам по себе является операционным риском и классифицируется как событие «клиенты, банковские продукты и деловая практика».

*Методика исследования.* Параметры операционного риска являются важным фактором банковской деятельности, в том числе при оценке достаточности капитала Н1. Упрощенная форма для расчета норматива:

$$H1 = \frac{\text{Собственный капитал}}{\text{Кредитный риск} + \text{Рыночный риск} + \text{Операционный риск}} 100 \%$$

Показатель операционного риска находится в знаменателе, следовательно, чем он больше, тем жестче требования к величине собственного капитала банка.

Порядок и методы расчета параметров операционного риска устанавливаются нормативными документами регулирующих органов. Согласно рекомендациям Базельского комите-

та по банковскому надзору (БКБН), а также последовавшим за ними рекомендациям Центрального Банка Российской Федерации, всем кредитным организациям следует разрабатывать основные принципы управления операционным риском, следовать им, а также совершенствовать их. Эти принципы должны стать определяющими для стратегии управления операционным риском в кредитной организации во всех аспектах, включая выявление, оценку, мониторинг и контроль [6].

**Статистическое моделирование операционных потерь.** Разрабатывая теорию и методологию управления операционным риском, необходимо учитывать, что управление операционным риском – это своего рода полярная категория. С одной стороны действует регулятор, задача которого – выстроить стабильную и надежную банковскую систему в заданной области или государстве. Для этого требования к отчисляемому на покрытие операционных рисков капиталу должны быть обоснованно жесткими: банк должен быть готов выстоять в случае непредвиденных потерь значительной величины, даже если статистически они происходят редко. С другой стороны действует банк, и для него возрастающее количество резервируемого капитала напрямую сказывается на размере получаемой прибыли. В достаточно сложной ситуации оказывается каждый риск-менеджер, занимающийся операционным риском. Его задачей является такое определение параметров операционного риска, которое будет соответствовать регулятивным требованиям и при этом не превышать размер отчисляемого капитала.

Согласно Базель II для расчета величины капитала на покрытие операционного риска следует использовать один из трех подходов: подход базового индикатора (BIA – Basic Indicator Approach), стандартизированный подход (SA – Standartized Approach), усовершенствованный (продвинутый) подход (Advanced Measurement Approach).

Согласно масштабному исследованию LDCE (Loss Data Collection Excercise) [22], проведенному Базельским комитетом, результаты которого были опубликованы в 2009 г., во всех мировых регионах величина отчисляемого на покрытие операционного риска



при расчете посредством VIA и SA капитала превосходит капитал, отчисляемый после расчетов по методам группы продвинутых подходов (АМА). В среднем экономия капитала достигает 2 % от валового дохода банка [9]. При этом к 2009 г. лишь 22 % респондентов перешли на полное или частичное использование АМА. Это объясняется, с одной стороны, сложностью внедрения АМА, а с другой стороны – тем, что изначально не ясно, превысит ли ожидаемая за счет применения АМА выгода затраты на их реализацию.

Кредитные организации должны быть заинтересованы в применении более сложных методов АМА, так как именно они призваны отражать реальную структуру деятельности банка, качество управления бизнес-процессами и рисками, а также другие особенности деятельности конкретного банка. Также в рамках применения усовершенствованных подходов к оценке операционного риска банкам разрешается учитывать потенциальное страховое возмещение для уменьшения величины отчисляемого капитала, тем самым учитывая страхование как инструмент смягчения последствий операционного риска. Посредством учета страхования величина резерва не может быть уменьшена более чем на 20 %. При этом накладывается ряд требований как на модель учета страховых выплат при расчете операционного риска, так и на саму страховую компанию и программу страхования.

Распространенным подходом среди группы АМА является подход на основе распределения потерь (LDA – Loss Distribution Approach). Согласно методу LDA банк группирует однородные события операционного риска, оценивает функции вероятностного распределения частоты и величины потерь по каждой группе, а затем на основе полученных оценок строит общую функцию распределения потерь от реализации операционного риска. Такой подход также носит название актуарного (термин из области страхования). Схема реализации подхода LDA представлена на рис. 1.

Большинство событий операционного риска происходит с частотой от одного раза в день. Потери в основном связаны с некомпетентностью неопытных сотрудников, ошибками и сбоями в компьютерных системах, случаями мошенничества с кредитными кар-

тами. Убытки от таких событий имеют сравнительно небольшой размер. С другой стороны, большую опасность представляет именно события операционного риска, которые приводят к значительным потерям. Как правило, они происходят крайне редко – один раз в пять лет, один раз в 50 лет или даже реже. К таким событиям относятся, к примеру, природные катаклизмы, террористические атаки. Кроме того, иногда потери выявляются спустя месяцы или годы, т. е. разница в датах наступления события операционного риска и фиксации последовавшей за событием потери, составляет месяцы или годы.

Таким образом, стохастический процесс наступления операционных убытков имеет нерегулярную интенсивность, иногда внутри одной однородной группы интервал времени между наступлением потерь может колебаться от минут и часов до десятков лет, а величины убытков отличаться в сотни раз. Для того чтобы учесть в модели такую специфику появления потерь, в подходе LDA потери внутри каждой группы моделируются отдельно как процесс, определяемый случайной частотой наступления убытков, имеющих случайную величину в денежном эквиваленте.

Имея для анализа распределение частоты и величины потерь по-отдельности, можно получить более глубокое понимание проблем операционного риска в кредитной организации. Кроме того, влияние соответствующих мер по смягчению подверженности риску может быть проанализировано по этим двум составляющим. Еще одной причиной, по которой частота и величина потерь должны моделироваться отдельно, является тот факт, что модели для частоты потерь являются в значительной степени простыми, при этом опыт показывает, что они хорошо выполняют задачу моделирования [20].

Здесь мы рассматриваем моделирование величин операционных убытков не касаясь моделирования частоты. Это связано с тем, что большинство кредитных организаций установило свой выбор на одной из двух достаточно простых моделей – модели Пуассона и модели на основе негативного биномиального распределения. Подробно о проблемах, связанных с моделированием частот наступления убытков можно ознакомиться в [20].

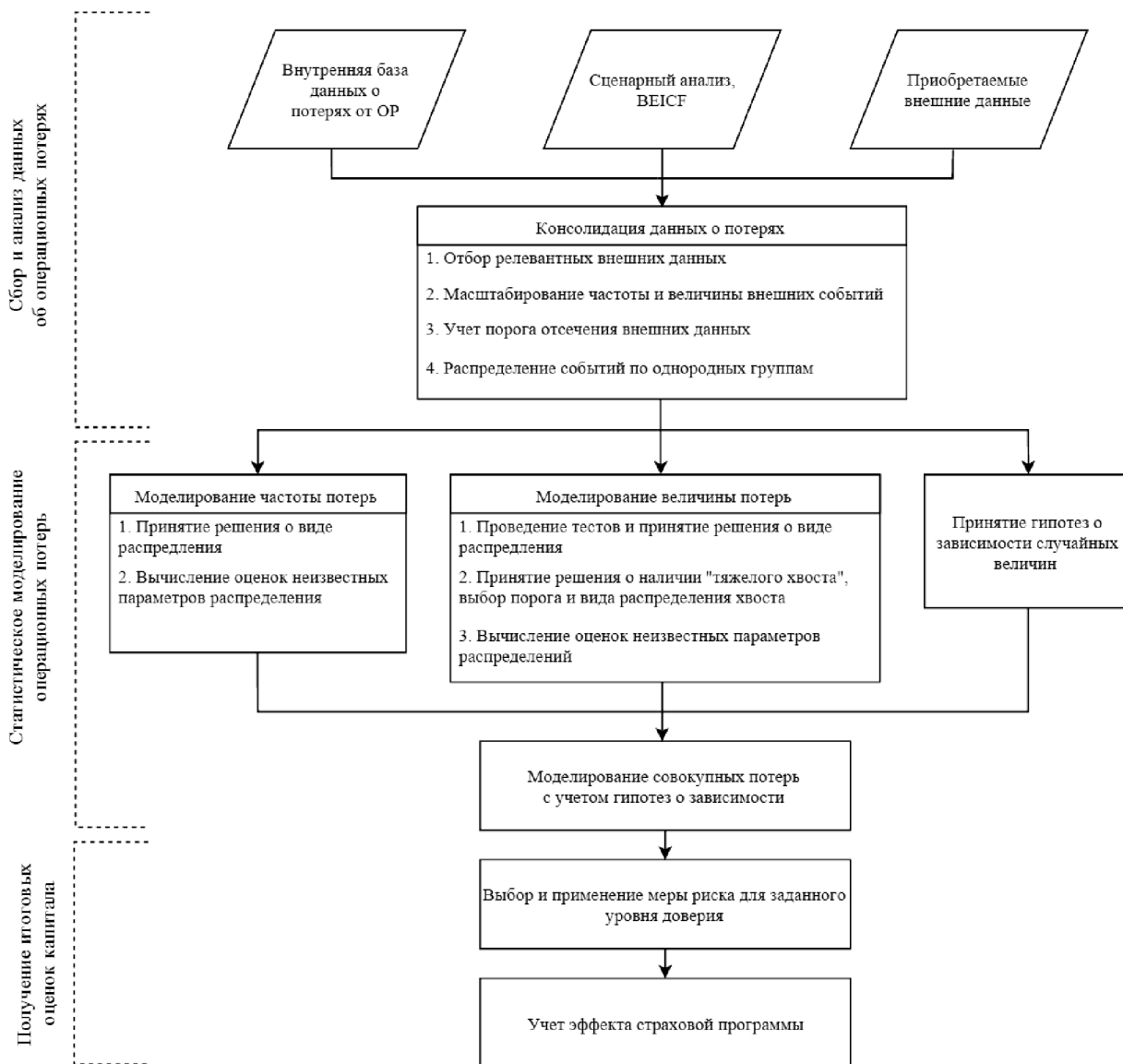


Рис. 1. Схема используемой модели согласно подходу LDA

**Распределение величин убытков.** В статистике существует два подхода к получению информации о распределении на основе имеющейся выборки данных: непараметрический и параметрический. Параметрический подход состоит в поиске общепринятого распределения, которое наилучшим образом описывает имеющийся набор данных. Работа с таким распределением существенно проще, так как оно имеет аналитическую форму и обладает определенными изученными свойствами, что и обеспечивает популярность параметрическим моделям.

По определению потери могут принимать только неотрицательные значения, поэтому для рассмотрения предлагаются, прежде всего, распределения случайной величины с областью определения  $(0, \infty)$ . Кроме того, стоит учесть, что, вообще говоря, величина потерь должна быть ограничена и сверху некоторым достаточно большим числом, к примеру, размером всех активов организации. Однако при моделировании с целью упрощения часто накладывается предположение о том, что вероятность наступления событий подобной величины крайне мала. Если не накладывать



данное условие, то к случайной переменной величины потерь  $X$  необходимо применить ограничение верхнего порога  $x$  и рассматривать распределение случайной величины  $X \wedge x$ . В частности, это приведет к тому, что моменты всех порядков будут отличны от моментов распределения  $X$ .

Общепринятых распределений для величины операционных потерь и их возможных комбинаций достаточно много. Основными критериями для выбора распределения на основе имеющихся данных могут быть следующие показатели в порядке убывания важности [15].

1. Правдоподобие. Насколько с точки зрения статистики выбранная модель подходит к имеющейся выборке.

2. Реалистичность. Если распределение является подходящим в статистическом смысле, то насколько реалистичными являются оценки капитала, полученные посредством такой модели.

3. Хорошая определенность. Схожи ли характеристики моделируемых данных с реальными данными о потерях, являются ли они логически совместимыми.

4. Гибкость. Насколько хорошо выбранная модель может подстраиваться к изменяющемуся и пополняющемуся множеству данных о реальных потерях.

5. Простота. Является ли предлагаемый метод простым в реализации на практике, в том числе в процессе симуляционных экспериментов.

Одной из возможных классификаций моделей, используемых для моделирования величины потерь от операционного риска, является классификация по числу используемых параметров. Количество параметров свидетельствует о сложности модели. В пользу стремления к упрощению модели говорят следующие аргументы:

– при меньшем количестве параметров более вероятно, что каждый из них будет определен более точно;

– более простая модель предположительно будет давать более стабильные оценки при применении ее для различных временных промежутков и входных данных;

– входные данные модели часто могут быть нерегулярными, неровными, и простая модель может нужным образом сглаживать эту неровность.

Преимущества более сложных моделей с большим числом параметров:

– большее количество параметров дает большую гибкость для отражения реальности в модели;

– с большим количеством параметров модель может более близко отразить нерегулярность входных данных.

Так называемый принцип скупости для выбора модели говорит о том, что предпочтительным является использование более простой модели в том случае, если она адекватно отражает реальность. Трактовка «адекватности» должна соответствовать цели, для которой используется модель.

Общепринятые распределения имеют от одного (экспоненциальное распределение) до пяти (обобщенное бета-распределение) параметров. Многие из основных распределений связаны, являясь частными или предельными случаями распределений с большим количеством параметров. Отношение большой группы параметрических распределений показано в виде дерева на рис. 2. Согласно имеющейся статистике все банки пользуются распределениями из этой группы, а также смешивают их [19].

Хорошо известны и представлены в литературе три особенности данных о величине потерь от операционного риска, которые осложняют применение популярных параметрических распределений [10–12, 15, 21]:

1) острый пик распределения величин потерь, выражающийся большими значениями коэффициента эксцесса:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \quad \mu_4 = E([X - E(X)]^4), \\ \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)};$$

2) асимметрия относительно среднего значения со скошенностью справа, выражающаяся в положительном значении коэффициента асимметрии:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad \mu_3 = E([X - E(X)]^3), \quad \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)};$$

3) тяжелый хвост операционных потерь, т. е. присутствие событий, которые приводят к крайне редким потерям большой величины.

Возможный характер графика плотности распределения величин операционных убытков с острым пиком, асимметрией и тяжелым хвостом, соотношенный с гистограммой потерь, показан на рис. 3.

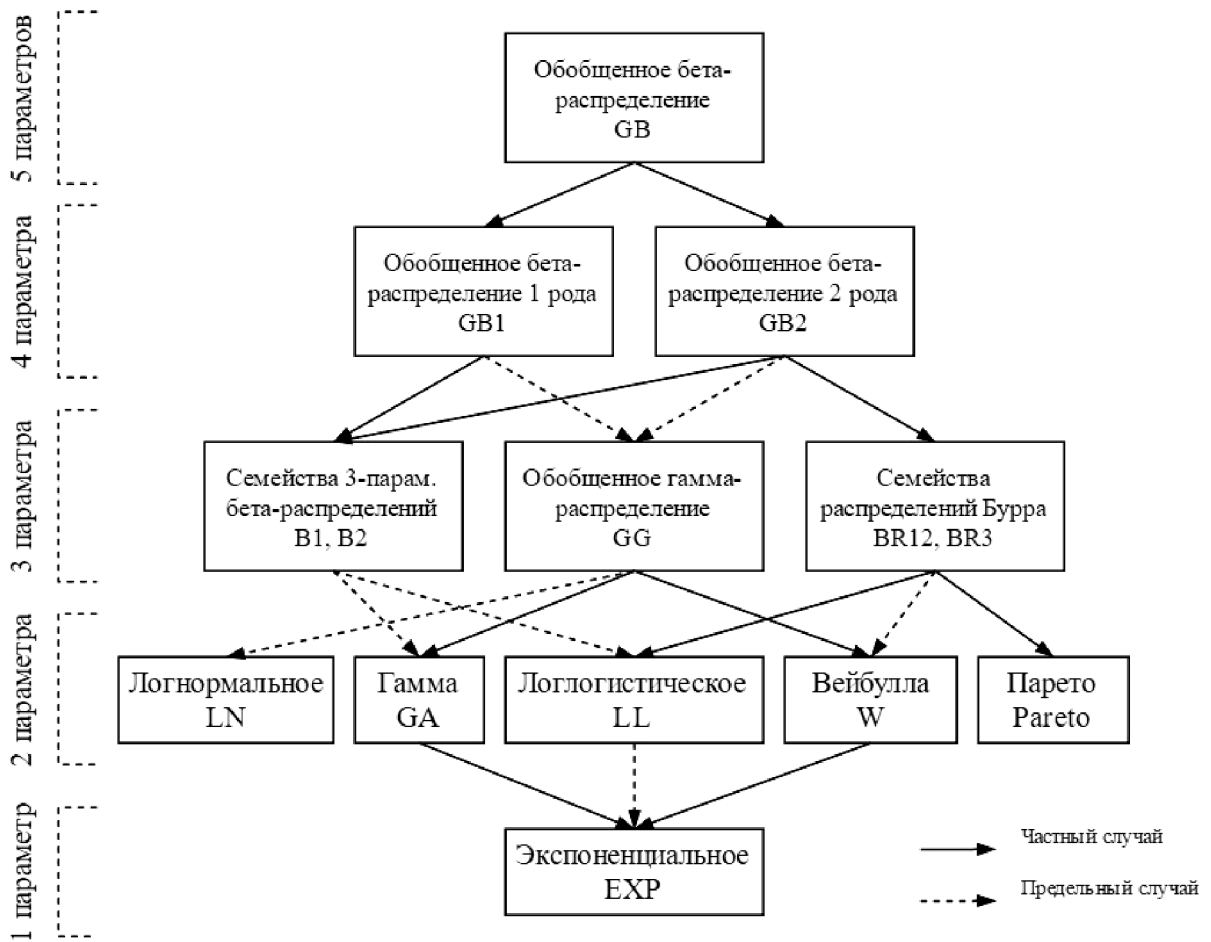


Рис. 2. Взаимосвязь основных распределений, используемых для моделирования величины операционных потерь [17, 20]

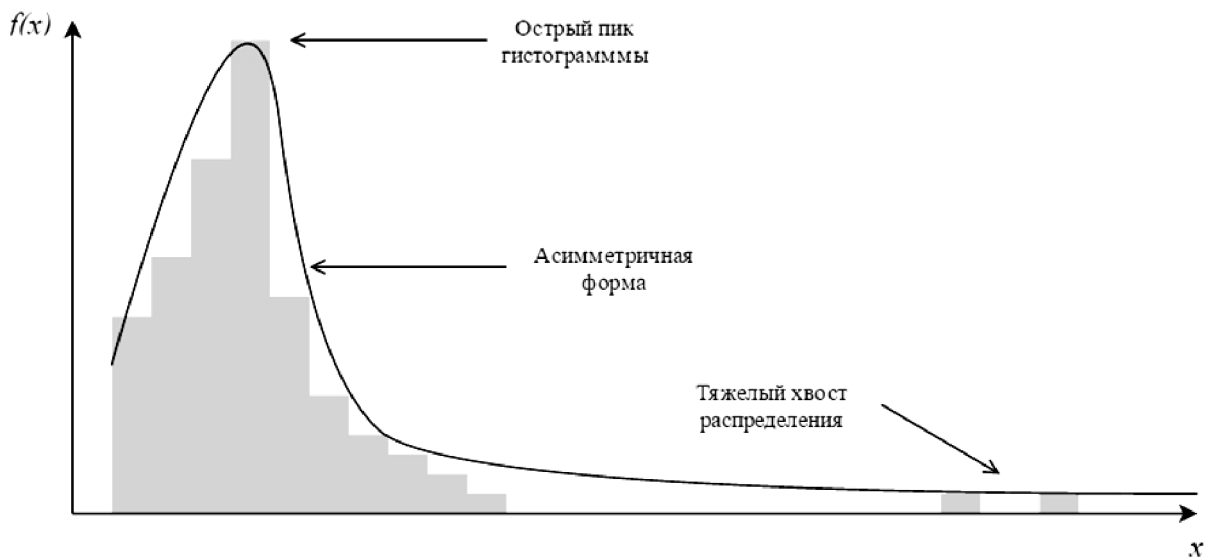


Рис. 3. Пример графика плотности распределения операционных потерь

В тех группах событий, в которых теоретически возможны большие потери низкой частоты, при моделировании должны использоваться распределения с тяжелым хвостом.

**Определение 1.** Пусть  $F(x)$  – функция распределения случайной величины  $X$ .  $F(x)$  называется имеющая тяжелый правый хвост, если при  $\forall \lambda > 0$  выполнено предельное соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} \Pr[X > x] = \infty.$$

Иными словами, распределение с тяжелым хвостом – это распределение с хвостом, убывающим медленнее, чем хвост экспоненциального распределения. Частным случаем распределений с тяжелыми хвостами являются распределения с толстыми хвостами, у которых скорость убывания хвоста соответствует степенному закону.

**Определение 2.** Пусть  $F(x)$  – функция распределения случайной величины  $X$ .  $F(x)$  называется имеющая толстый правый хвост, если при  $\exists \alpha > 0$  выполнено предельное соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \Pr[X > x] = \infty.$$

Часто термин «толстый хвост» употребляется только для  $0 < \alpha < 2$ , что означает отсутствие конечной дисперсии и моментов более высокого порядка. Также и термин «тяжелый хвост» иногда употребляется некоторыми учеными для распределений, не имеющих конечной дисперсии или конечных моментов вообще, что соответствует лишь частным случаям приведенного выше определения.

Примерами общеупотребимых распределений с тяжелым хвостом являются распределение Парето, распределение Вейбулла, логнормальное распределение и т. д. При этом экспоненциальное распределение является своего рода пограничным между распределениями с легким и тяжелым хвостами. Это может играть значительную роль при выборе закона распределения для модели при принятии решения о наличии или отсутствии тяжелого хвоста на основании имеющихся данных.

Графическую процедуру проверки тяжести хвоста можно устроить на основе ли-

нейной регрессии. Необходимо построить график в двойном логарифмическом масштабе: по горизонтальной оси откладываем ранг (порядковый номер) величины операционной потери  $x$  от самой маленькой до самой большой, а по вертикальной – величину  $\Pr[X > x]$ , рассчитываемую на основе имеющейся выборки. Если получающееся множество точек близко к прямой линии, можно судить о потенциальном присутствии в выборке тяжелого хвоста, близкого к убыванию по степенному закону, так как если плотность распределения

$$f(x) = Cx^{-\alpha-1},$$

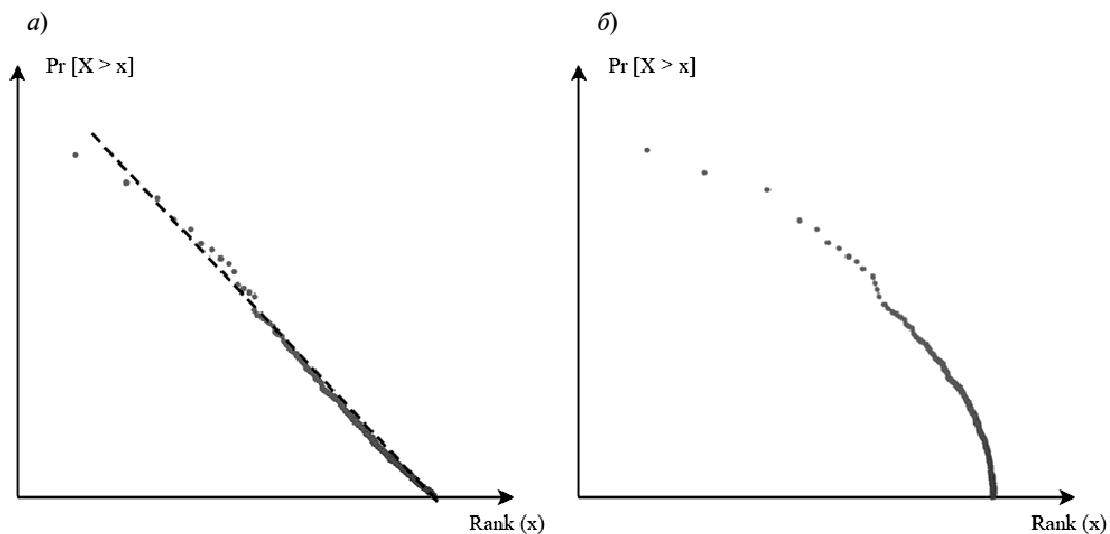
то при переходе к комплементарной функции распределения вероятности

$$\Pr[X > x] = \bar{F}(x) = C'x^\alpha,$$

что при переходе к двойному логарифмическому масштабу дает линейную зависимость. Использование ранга на оси абсцисс является удобным для проведения графического теста, так как более кучно располагает на графике точки, отвечающие за представление хвоста выборки, облегчая тем самым экспертное суждение. Примеры графического теста показаны на рис. 4.

Описанная процедура не может служить для модели строгим обоснованием выбора распределения с тяжелым хвостом, но она является отправной точкой для гипотезы, требующей проверки другими, аналитическими, методами, например методом максимального правдоподобия, взвешенным методом наименьших квадратов, оценкой Хилла или оценкой Пикандса для тяжести хвоста [11, с. 169]. В частности, в работе [7] показано, что посредством расчетов на основе оценки Хилла можно однозначно утверждать, что распределение имеет тяжелый хвост.

Перечисленные особенности данных о величине операционных потерь, включая островершинность и наличие тяжелых хвостов, вынуждают использовать более сложные модели, в частности, усложнение состоит в смешивании распределений, применении альтернативных подходов и увеличении количества используемых параметров распределения. Эти меры направлены на то, чтобы более точно отразить форму имеющихся данных.



**Рис. 4.** Возможный вид рангового графика комплементарной функции распределения: а) свидетельствует о наличии степенного убывания в хвосте выборки, б) свидетельствует об отсутствии степенного убывания

Согласно исследованиям А. Chernobai, S. Rachev, F. Fabozzi [11], гистограммы имеющих у банка операционных потерь нередко имеют выраженный пик в районе нуля, что соответствует частым потерям небольшой величины, а также меньший, но различаемый пик правее в сторону хвоста. Это приводит к предположению о том, что величину операционных потерь можно хорошо описать при помощи смешивания двух или более распределений. Функции распределения и плотности смеси из  $m$  распределений с весами  $w_j$  выглядят следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j=1}^m w_j f_j(x), \quad F(x) = \sum_{j=1}^m w_j F_j(x),$$

где  $w_j > 0 \forall j = 1, 2, \dots, m$ ,  $w_1 + \dots + w_m = 1$ .

Параметры смешанного распределения могут быть оценены по методу максимального правдоподобия. Распространенной численной процедурой оценки является EM-алгоритм (expectation-maximization algorithm), подробно описанный, к примеру, в [16].

Подход смешивания распределений выглядит привлекательным, с помощью него можно описать практически любую форму распределения, но необходимо учитывать, что веса  $w_j$ , добавляемые в модель, также являются параметрами, которые нужно оценивать вместе с неизвестными параметрами распределений  $F_j$ . К примеру, если описы-

вать тело имеющихся данных с помощью экспоненциального распределения с одним параметром, а хвост — с помощью распределения Парето с двумя параметрами, то всего в модели будет присутствовать четыре параметра (так как  $w_1 + w_2 = 1$ ), что вкупе с потенциально малым количеством данных об операционных потерях может привести к ее недостаточной надежности.

#### Моделирование потерь средствами EVT.

Популярной в академических исследованиях и на практике методикой является применение для оценки операционного риска теории экстремальных значений (EVT — extreme value theory). Пионерами этой ветви статистики в первой половине XX в. стали Л. Типпетт, Р. Фишер и Э. Гумбел. Также с EVT тесно связаны имена исследователей — Дж. Пикандса, Б. Гнеденко, П. Эмбрехтса. Теория экстремальных значений широко применяется в различных областях науки: в биологии, гидрологии, экологии, инженерных дисциплинах, а также в страховании и теории риска. Основные положения теории связаны с изучением поведения максимумов наблюдаемой случайной величины.

Практический аппарат на основе EVT включает два метода — AMS (annual maxima series — «ряды годовых максимумов», он же метод block-maxima) и POT (peaks over threshold — «максимумы, превышающие порог»).





Метод AMS состоит в разделении всего периода наблюдений на одинаковые отрезки (к примеру, года) и анализе выборки максимумов из каждого промежутка времени. В литературе встречаются сообщения об успешном применении модели block-maxima к оценке операционного риска [10]. Однако ограничение применения модели AMS к оценке операционного риска – наблюдаемая недостаточность данных о потерях от этого вида риска [2]. Если в процессе отбора максимальных значений в одном временном периоде окажутся, к примеру, глобальный максимум потери и величина потери, следующая за ним, то информация о второй по величине потере за историю наблюдений вообще не будет использована в процедуре оценки, что недопустимо.

Извлечь всю информацию из хвоста выборки можно с помощью метода POT, появившегося вслед за AMS. Теоретической базой для POT-анализа служит вторая теорема EVT.

**Определение 3.** Пусть  $X$  – случайная величина, имеющая функцию распределения  $F(x)$ . Тогда функция

$$F_u(x) = \Pr(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(u+x) - F(u)}{1 - F(u)},$$

$$0 \leq x \leq x_F - u,$$

называется условной функцией распределения превышений. Под  $x_F$  в данном случае понимается супремум области определения исходной функции  $F(x)$ .

**Теорема.** (Теорема Пикандса-Балкема-де Хаана). Пусть  $(X_1, X_2, \dots)$  – последовательность Н.О.Р.С.В., а  $F_u(x)$  – их условная функция распределения превышений. Тогда

$$F_u(x) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \text{GPD}(\xi, \beta),$$

где  $\text{GPD}(\xi, \beta)$  – так называемое обобщенное распределение Парето (generalized Pareto distribution), задаваемое следующим образом:

$$\text{GPD}(x; \xi, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta} x\right)^{\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}, & \xi = 0, \end{cases}$$

где  $\beta > 0$ ,  $x \geq 0$ , когда  $\xi \geq 0$ , и  $0 \leq x \leq -\beta / \xi$ , когда  $\xi < 0$ .

Нетрудно видеть, что обобщенное распределение Парето объединяет в одно целое двухпараметрическое распределение Парето ( $\xi > 0$ , тяжелый хвост), экспоненциальное распределение ( $\xi = 0$ ) и двухпараметрическое бета-распределение ( $\xi < 0$ , тонкий хвост). Чтобы использовать модель GPD на практике, прежде чем проводить оценку параметров, необходимо на основании имеющихся данных ответить на два вопроса:

– каковы знак и примерная величина параметра  $\xi$ , отвечающего за форму распределения превышения заданного порога? (Присутствует ли тяжелый хвост?);

– какой должна быть величина порога  $u$ ?

Для ответа на первый вопрос можно воспользоваться графиком оценок Хилла.

**Определение 4.** Пусть  $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \dots \geq X_{(n)}$  – порядковая статистика. Тогда оценкой Хилла параметра формы распределения  $\xi$  называется величина  $\hat{\xi}^H$ :

$$\hat{\xi}^H(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln X_{(j)} - \ln X_{(k)}.$$

Для построения графика оценок Хилла по горизонтальной оси откладывается величина  $k$ . При наличии степенного убывания в хвосте график оценок Хилла стабилизируется вокруг приближенной оценки  $\hat{\xi}$ , начиная с некоторого  $k$ , как показано на рис. 5,а.

Оценка Хилла работает на данных из хвоста выборки, поэтому такая процедура будет выявлять степенное убывание хвоста даже тогда, когда все множество данных не подчиняется степенному закону и это явление наблюдается только в хвосте.

Второй вопрос о пороговом значении POT является одной из центральных задач практического применения EVT. Проведенные исследования подтверждают, что от выбранной величины порога зависит не только оценка параметров GPD, но и в целом оценка капитала для покрытия операционного риска. Дилемма порогового значения заключается в следующем:

– если пороговое значение слишком велико, то в калибровочную выборку попадет малое количество превышающих значений, что приведет к увеличению дисперсии получаемой оценки;

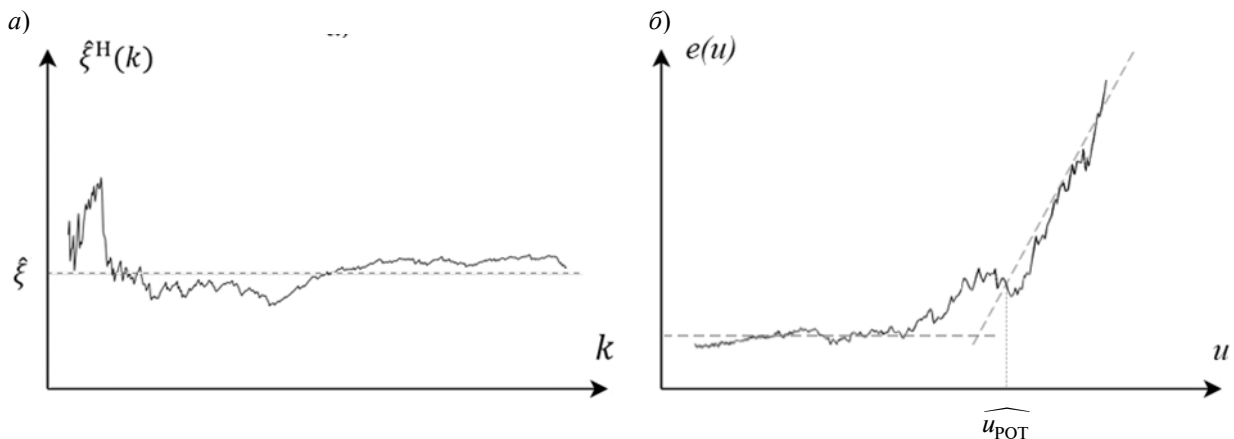


Рис. 5. График оценок Хилла а) с приближенной оценкой параметра  $\xi$ ; б) график среднего значения превышений порога с приближенной оценкой порога  $\widehat{u_{POT}}$

— если пороговое значение слишком низко, то, вообще говоря, не будет выполняться условие теоремы Пикандса-Балкема-де Хаана и приближение превышений через GPD потенциально приведет к увеличению дисперсии оценки параметра  $\hat{\xi}$ .

Существует несколько путей для поиска подходящего порогового значения метода POT [15]:

- 1) графические методы (график оценок Хилла, график среднего превышений);
- 2) метод автоподстройки для минимизации смещения и дисперсии;
- 3) специальные (ad hoc) методы;
- 4) методы на основе критериев согласия.

Построив график оценок Хилла и убедившись, что начиная с некоторого значения  $k_{min}$  множество точек графика лежит в окрестности горизонтальной прямой, в качестве порогового значения для POT может служить  $X_{(k_{min})}$ .

Также из графических методов определения порога в литературе повсеместно предлагается использовать так называемый график среднего значения превышений порога [10, 11, 15, 18, 20].

Пусть  $F(x)$  — функция распределения некоторой случайной величины  $X$ . Тогда среднее значение распределения превышений случайной величиной  $X$  порога  $u$  выглядит следующим образом:

$$e(u) = E[X - u | X > u] = \int_u^\infty \frac{1 - F(x)}{1 - F(u)} dx.$$

В случае распределения GPD функция среднего значения превышений имеет следующий вид:

$$e(u) = \frac{\beta}{1 - \xi} + \frac{\xi}{1 - \xi} u,$$

из чего следует, что при наличии у распределения тяжелого хвоста график функции  $e(u)$  должен выглядеть как возрастающая прямая линия. Чем тяжелее хвост, тем больше угловой коэффициент этой прямой (тем ближе  $\xi$  к 1). Необходимо построить график значений эмпирической функции среднего превышения в точках, соответствующих величинам каждой потери:

$$\widehat{e(u)} = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - u) I_{\{X_j > u\}}}{\sum_{j=1}^n I_{\{X_j > u\}}}.$$

Если начиная с некоторого значения  $\widehat{u_{POT}}$  получающееся множество точек зрительно лежит на возрастающей прямой, это свидетельствует о возможной применимости модели GPD с положительным параметром  $\xi$ . Если линия выглядит горизонтальной, это может говорить о том, что хвост распределения потерь убывает экспоненциально. Пример графика приведен на рис. 5,б.

Основной недостаток графических методов определения порога состоит в том, что фактически он происходит на основании не-



которого экспертного заключения. Кроме того, графические методы определения порога неоднозначны. К примеру, любой порог выше эвристически найденного значения также соответствует описанным критериям.

Метод автоподстройки основан на серии симуляций при разных уровнях порога, направленных на нахождение численными методами оптимального порогового значения, исходя из минимизации смещения и дисперсии получаемых оценок. Подробно данный метод описан в [13].

Специальные методы предлагают альтернативный подход. Например, устанавливать порог на таком уровне, чтобы ровно 40 наблюдений оказались в зоне превышения порога, или формировать выборку для GPD из 15 % наибольших значений исходной выборки. Такие методы направлены на обеспечение минимального достаточного количества данных для калибровки хвостового распределения, но не дают гарантии того, что GPD пройдет формальные критерии согласия.

Четвертая группа методов дает достаточно формальное обоснование для выбора величины порога, но не решает проблему единственности. Следовательно, может получиться несколько пороговых значений, приводящих к близким результатам тестов.

*Результаты исследования.* Математическая статистика предоставляет достаточно мощный аппарат для моделирования и оценки банковского операционного риска. Однако, как правило, использованию этого аппарата сопутствует целый ряд предполагаемых допущений, касающихся пороговых значений распределения потерь, однородности и взаимной независимости операционных событий, вида и количества параметров в применяемых моделях. Вопрос о влиянии этих допущений на итоговые оценки капитала не является до конца исследованным.

Кроме того, применение данных моделей требовательно к размеру и качеству калибро-

вочной выборки. Показано, что при недостаточном количестве входных данных используемые методы могут давать смещенные оценки.

Среди проблем практического применения EVT для моделирования операционного риска, можно выделить две основных – это дилемма выбора порогового значения и отсутствие возможности моделировать хвост распределения, убывающего медленнее, чем степенная функция.

Несмотря на это, модели EVT являются достаточно популярными в развитых финансовых институтах [19], и можно утверждать, что выбор пороговых значений, как и некоторые другие вопросы, все еще является предметом для эвристического обоснования.

*Выводы.* Таким образом, описанные проблемы как классической методики, так и EVT, подталкивают к поиску новых моделей. Один из путей состоит в использовании обобщенных распределений с большим количеством параметров, имеющих за счет этого большую гибкость. Как было показано, многие распределения более узких классов могут быть получены из обобщенных распределений путем некоторых преобразований. Следовательно, многие распределения могут быть приближены обобщенными распределениями. Если распределение обобщенного класса демонстрирует некоторое слабое согласие с имеющимися данными, это свидетельствует о том, что одно из частных или предельных распределений более узкого класса должно показать хорошие результаты статистических тестов.

Согласно проведенным исследованиям, большим потенциалом для моделирования операционного риска обладает так называемое распределение g-и-h [14]. Свойства этого распределения, а также особенности работы с данной моделью для анализа операционного риска можно предложить в качестве тем для дальнейших исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булацкий С.М. Связь операционного риска с другими типами рисков коммерческого банка // Экономика, экология и общество России в 21-м

столетии : сб. науч. тр. 17-й Междунар. науч.-практ. конф. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015. С. 210–214.

2. **Золотарева Е.Л.** Математическое моделирование операционного риска в коммерческом банке: дис. ... канд. экон. наук. М., 2011.
3. **Кох Л.В., Булацкий С.М.** Эволюция понятия банковского операционного риска и подходов к управлению им в коммерческих банках // Вестник ЗабГУ. 2015, № 3(118). С. 164–173.
4. **Кох Л.В.** Банковские риски и инновационная деятельность банка // Экономика, экология и общество России в 21-м столетии : сб. науч. тр. 17-й Междунар. науч.-практ. конф. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та., 2015. С. 326–330.
5. **Кох Л.В.** Совершенствование системы управления банковскими рисками // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. 2010. № 1(92). С. 222–226.
6. О порядке расчета размера операционного риска: положение Банка России № 346-П от 03.11.2009 г., ред. от 03.07.2012 г. // Вестник Банка России. 2009. № 77.
7. **Шепель В.Н., Акимов С.С.** Использование оценки Хилла для различения законов распределения вероятности // Вестник ОГУ. 2014. № 1(162). С. 75–78.
8. **Ames M., Schuermann R., Scott H.** Bank Capital for Operational Risk: A Tale of Fragility and Instability // Journal of Risk Management in Financial Institutions, 2015, vol. 8(3), pp. 227–243.
9. **Anghelache, G.V., Cozmanca B.O., Handoreanu C.A., Obreja C., Olteanu A.C., Radu A.N.** Operational Risk – An Assessment at International Level // International journal of mathematical models and methods in applied sciences, 2011, vol. 1(5), pp. 184–192.
10. **Chalupka R., Teply P.** Operational Risk Management and Implications for Bank's Economic Capital – A Case Study. Prague: Charles University, 2008. 37 p.
11. **Chernobai A., Rachev S., Fabozzi F.** A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. 300 p.
12. **Chaudhury M.** Issues in Operational Risk Capital Modeling. URL: <http://www.fma.org/NY/Papers/IssuesOpRiskCapital.pdf> (дата обращения: 14.01.2014).
13. **Danielsson J., de Haan L., Peng L., de Vries C.G.** Using a Bootstrap Method to Choose the Sample Fraction in Tail Index Estimation // Journal of Multivariate Analysis, 2001, vol. 76, pp. 226–248.
14. **Degen M., Embrechts P., Lambrigger D.** The Quantitative Modeling of Operational Risk: Between g-and-h and EVT. Zurich: Homepage Prof. Dr. Paul Embrechts. URL: [https://people.math.ethz.ch/~embrechts/ftp/g-and-h\\_May07.pdf](https://people.math.ethz.ch/~embrechts/ftp/g-and-h_May07.pdf) (дата обращения: 13.02.2016).
15. **Dutta K., Perry J.** A tale of tails // Federal Reserve Bank of Boston. URL: <https://www.bostonfed.org/economic/wp/wp2006/wp0613.pdf> (дата обращения: 12.02.2016).
16. **Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.** The Elements of Statistical Learning. New York: Springer, 2001, pp. 272–276.
17. **McDonald J.B., Yexiao J.X.** A generalization of the beta distribution with applications // Journal of Econometrics, 1995, vol. 66, pp. 133–152.
18. **Nešlehová J., Embrechts P., Chavez-Demoulin V.** Infinite-mean models and the LDA for operational risk // Journal of Operational Risk, 2006, vol. 1(1), pp. 3–25.
19. Observed range of practice in key elements of Advanced Measurement Approaches (AMA), Basel Committee on Banking Supervision, July 2009. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsl60b.pdf> (дата обращения: 31.01.2016).
20. **Panjer H.** Operational Risk: Modeling Analytics. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006. 431 p.
21. **Rippel M., Teply P.** Operational risk – scenario analysis // IES Working Paper, 2008, no. 15. 35 p.
22. The 2002 Loss Data Collection Exercise for Operational Risk: Summary of the Data Collected // Basel Committee on Banking Supervision, March 2003. URL: <http://www.bis.org/bcbs/qis/ldce2002.pdf> (дата обращения: 10.02.2016).

## REFERENCES

1. **Bulatskii S.M.** Sviaz' operatsionnogo riska s drugimi tipami riskov kommercheskogo banka. *Ekonomika, ekologiya i obshchestvo Rossii v 21-m stoletii* : sb. nauch. tr. 17-i Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. SPb.: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2015. S. 210–214. (rus)
2. **Zolotareva E.L.** Matematicheskoe modelirovanie operatsionnogo riska v kommercheskom banke: dis. ... kand. ekon. nauk. M., 2011. (rus)
3. **Kokh L.V., Bulatskii S.M.** Evoliutsiia poniatiia bankovskogo operatsionnogo riska i podkhodov k upravleniiu im v kommercheskikh bankakh. *Vestnik ZabGU*. 2015, № 3(118). S. 164–173. (rus)
4. **Kokh L.V.** Bankovskie riski i innovatsionnaia deiatel'nost' banka. *Ekonomika, ekologiya i obshchestvo Rossii v 21-m stoletii* : sb. nauch. tr. 17-i Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. SPb. : Izd-vo Politekhn. un-ta., 2015. S. 326–330. (rus)
5. **Kokh L.V.** The improvement of a system of the bank risk management. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics*, 2010, no. 1(92), pp. 222–226. (rus)
6. О порядке расчета размера операционного риска: положение Банка России № 346-П от 03.11.2009 г., ред. от 03.07.2012 г. *Vestnik Banka Rossii*. 2009. № 77. (rus)



7. **Shepel' V.N., Akimov S.S.** Ispol'zovanie otsenki Khilla dlia razlicheniia zakonov raspredeleniia veroiatnosti. *Vestnik OGU*. 2014. № 1(162). S. 75–78. (rus)
8. **Ames M., Schuermann R., Scott H.** Bank Capital for Operational Risk: A Tale of Fragility and Instability. *Journal of Risk Management in Financial Institutions*, 2015, vol. 8(3), pp. 227–243.
9. **Anghelache, G.V., Cozmanca B.O., Handoreanu C.A., Obreja C., Olteanu A.C., Radu A.N.** Operational Risk – An Assessment at International Level. *International journal of mathematical models and methods in applied sciences*, 2011, vol. 1(5), pp. 184–192. (rus)
10. **Chalupka R., Těplý P.** Operational Risk Management and Implications for Bank's Economic Capital – A Case Study. Prague: Charles University, 2008. 37 p.
11. **Chernobai A., Rachev S., Fabozzi F.** A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. 300 p.
12. **Chaudhury M.** Issues in Operational Risk Capital Modeling. URL: <http://www.fma.org/NY/Papers/IssuesOpRiskCapital.pdf> (accused January 14, 2014).
13. **Danielsson J., de Haan L., Peng L., de Vries C.G.** Using a Bootstrap Method to Choose the Sample Fraction in Tail Index Estimation // *Journal of Multivariate Analysis*, 2001, vol. 76, pp. 226–248.
14. **Degen M., Embrechts P., Lambrigger D.** The Quantitative Modeling of Operational Risk: Between g-and-h and EVT. Zurich: Homepage Prof. Dr. Paul Embrechts. URL: [https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/g-and-h\\_May07.pdf](https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/g-and-h_May07.pdf) (accused February 13, 2016).
15. **Dutta K., Perry J.** A tale of tails. *Federal Reserve Bank of Boston*. URL: <https://www.bostonfed.org/economic/wp/wp2006/wp0613.pdf> (accused February 12, 2016).
16. **Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.** The Elements of Statistical Learning. New York: Springer, 2001, pp. 272–276.
17. **McDonald J.B., Yexiao J.X.** A generalization of the beta distribution with applications. *Journal of Econometrics*, 1995, vol. 66, pp. 133–152.
18. **Nešlehová J., Embrechts P., Chavez-Demoulin V.** Infinite-mean models and the LDA for operational risk // *Journal of Operational Risk*, 2006, vol. 1(1), pp. 3–25.
19. Observed range of practice in key elements of Advanced Measurement Approaches (AMA), Basel Committee on Banking Supervision, July 2009. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbsl60b.pdf> (accused January 31, 2016).
20. **Panjer H.** Operational Risk: Modeling Analytics. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006. 431 p.
21. **Rippel M., Těplý P.** Operational risk – scenario analysis. IES Working Paper, 2008, no. 15. 35 p.
22. The 2002 Loss Data Collection Exercise for Operational Risk: Summary of the Data Collected. *Basel Committee on Banking Supervision*, March 2003. URL: <http://www.bis.org/bcbs/qis/ldce2002.pdf> (data accused February 10, 2016).

---

**КОХ Лариса Вячеславовна** – профессор Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, доктор экономических наук.

195251, ул. Политехническая, д. 29, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: [lkokh@mail.ru](mailto:lkokh@mail.ru)

**КОКН Larisa V.** – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

195251. Politechnicheskaya str. 29. St. Petersburg. Russia. E-mail: [lkokh@mail.ru](mailto:lkokh@mail.ru)

**БУЛАЦКИЙ Станислав Михайлович** – аспирант Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

195251, ул. Политехническая, д. 29, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: [bulatsky@gmail.com](mailto:bulatsky@gmail.com)

**BULATSKY Stanislav M.** – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

195251. Politechnicheskaya str. 29. St. Petersburg. Russia. E-mail: [bulatsky@gmail.com](mailto:bulatsky@gmail.com)

---