УДК 519.83, 519.86 DOI: 10.5862/JE.233.21

В.Д. Матвеенко, А.В. Королёв, А.А. Алфимова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ В СЕТЕВОЙ ИГРЕ С ПРОИЗВОДСТВОМ И ВНЕШНИМИ ЭФФЕКТАМИ

V.D. Matveenko, A.V. Korolev, A.A. Alfimova

ON EQUILIBRIUM STABILITY IN A NETWORK GAME WITH PRODUCTION AND EXTERNALITIES

Рассматривается сетевая модель с производством и внешними эффектами, которая описывает ситуацию, типичную для многих экономических, социальных и политических систем. В первом временном периоде каждый из агентов в сети получает доход и распределяет его между потреблением и инвестициями. Во втором периоде потребление агента зависит от его собственных инвестиций, а также от инвестиций его соседей по сети. Выигрыш агента определяется его потреблением в двух периодах времени. Мы вводим в эту модель динамику уравновешивания и изучаем проблему устойчивости игрового равновесия. Важным фактом, который мы обнаруживаем в ходе исследования, является особая роль условий наличия и отсутствия продуктивности, которые проявляются как в статическом, так и в динамическом контексте. Специфика динамики и природа результирующего равновесия зависят от параметров модели и от характера начального возмущения. Мы обнаруживаем неустойчивость внутреннего равновесия и изучаем сходимость к новому угловому равновесию, а также устойчивость последнего. При этом внутреннее равновесие оказывается неустойчивым не только при наличии продуктивности, что, как мы показываем, совершенно естественно, но и при отсутствии продуктивности. Это обусловлено взаимовлияниями агентов сети. Угловые равновесия в любом случае устойчивы. Неустойчивость внутреннего равновесия, свойства которой исследуем, типична для социальных и экономических систем. Наличие многих социальных институтов можно объяснить стремлением членов общества сохранить существующие равновесия при существующей динамической неустойчивости, которая имела бы место без такого рода стабилизирующих институтов.

СЕТЬ; СЕТЕВАЯ ЭКОНОМИКА; ИГРА НА СЕТИ; РАВНОВЕСИЕ; ВНЕШНИЕ ЭФФЕКТЫ; ПРОИЗВОДСТВО; УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ.

We consider a network model of production with externalities which describes a situation typical for many economic, social, and political systems. In the first period of time each of the agents in the network receives endowment and distributes it between consumption and investment. In the second period the agent's consumption depends on its own investment as well as on investments of its neighbors. The agent's benefit is determined by its consumption in the two periods. We introduce adjustment dynamics into this model and study the problem of stability of the game equilibrium. An important fact which we have discovered in our research is the special role of the conditions of the presence and the absence of productivity both in a static and in a dynamic framework. The specifics of the dynamics and the nature of the resulting equilibrium depend on the parameters of the model and on the character of the initial disturbance. We have found the instability of the inner equilibrium and have studied the convergence to a new corner equilibrium and the stability of the latter. The instability of the inner equilibria, which we found and the sources of which we study, is the property typical for social and economic systems. The presence of many social institutions can be explained by the wish of the members of the society to preserve the existing equilibria under the dynamic instability which would take place without such stabilizing institutions.

NETWORK; NETWORK ECONOMICS; NETWORK GAME; EQUILIBRIUM; EXTERNALITY; PRODUCTION; STABILITY OF EQUILIBRIUM.

Введение. В последнее десятилетие большое внимание уделяется изучению социальных сетей, сетевой экономики и игр на сетях. Появилось множество исследований с теоретическими результатами, которые всё чаще используются для анализа сетей реальной жизни, таких так Интернет, отношения между людьми в социальных группах, а также экономические отношения между фирмами и целыми странами [6, 7]. Тем не менее, недостаточное внимание уделено изучению равновесия в сетях с производством.

В одной из первых моделей игрового равновесия в сети с производством и внешними эффектами [12] рассматривается ситуация, характерная для большинства реально существующих систем. В первом периоде каждый агент получает некоторый начальный запас блага. Часть этого запаса используется для потребления, а оставшаяся часть инвестируется в производство, результат которого используется для потребления во втором периоде. При этом величина произведенного блага зависит не только от инвестиций самого агента, но и от инвестиций его соседей. Целевая функция агента определяется потреблением в обоих периодах.

Под понятием равновесия в сетевой игре подразумевается ситуация, в которой каждый из агентов максимизирует свой выигрыш и ни одному из агентов сети не выгодно изменять своё поведение при неизменном поведении остальных участников сети. Существование и структура равновесия в сети зависят от структуры самой сети. В [12] описывается три типа поведения агентов: пассивный (инвестиции отсутствуют), активный (инвестируется часть начального количества блага) и гиперактивный (инвестируется всё начальное количество блага). Соответственно, различаются внутреннее равновесие (в котором все агенты активны) и угловое равновесие (когда хотя бы один из агентов сети пассивен или гиперактивен). В [12] доказана единственность внутреннего равновесия в случае его наличия, найдены условия существования внутреннего равновесия для различных типов сетей и комбинаций параметров. При этом оказываются существенными свойства наличия продуктивности и отсутствия продуктивности.

В [12] модель определена только в статической форме. В данной работе мы предлагаем для этой модели определение динамики, которая начинается после нарушения внутреннего равновесия. Мы доказываем неустойчивость внутреннего равновесия и его сходимость к новому угловому равновесию, которое оказывается устойчивым. Особенности динамики и природа получаемого равновесия зависят от параметров модели и характера начального возмущения.

В частности, мы доказываем, что при наличии продуктивности в любой сети, которая первоначально находится в состоянии равновесия, если один из агентов увеличивает (уменьшает) размер своих инвестиций, то возмущенное равновесие сходится к угловому равновесию, в котором каждый агент гиперактивен (соответственно, пассивен). При отсутствии продуктивности имеет место аналогичный исход, если агент уменьшает размер собственных инвестиций, тогда как при увеличении равновесного размера инвестиций то же самое имеет место лишь при наличии дополнительных условий.

Методика и результаты исследования.

1. Модель

Мы рассматриваем сеть[1] (неориентированный граф) общего вида с вершинами $i = 1, 2, ..., n$. В каждой вершине находится агент, предпочтения которого в двух временных периодах описываются функцией полезности $U(c_i^1, c_i^2)$, где c_i^1, c_i^2 – потребление в периодах 1 и 2 соответственно. Предполагается, что функция U дважды непрерывно дифференцируема, как возрастающая и вогнутая по каждому аргументу, причем хотя бы по одному из них – строго.

В первом периоде каждый агент имеет начальное (одинаковое для всех) количество e какого-либо блага. Это количество может быть частично потреблено агентом в периоде 1, либо инвестировано в знания[2], которые используются для производства финального блага, потребляемого в периоде 2.

Обозначим через k_i инвестиции в знания. Пусть $\tilde{K}_i$ – экстерналия, определяемая как сумма инвестиций ближайших соседей агента i (т. е. агентов, находящихся в соседних с i вершинах сети); через такие экстерналии осуществляется взаимодействие игроков в модели. Среда агента представляет собой сумму его собственных инвестиций и инвестиций, сделанных его соседями: $K_i = k_i + \tilde{K}_i$.

Производство блага описывается производственной функцией $F(k_i, K_i)$, зависящей от инвестиций в знания k_i и среды K_i. Функция F является возрастающей по каждому

[1] Ромер [15] описал такую модель в частном случае полной сети; мы рассматриваем сеть общего вида.

[2] Аналогично Ромеру [15], мы говорим об инвестициях в знания и экстерналиях знаний, хотя модель может быть использована и в более общей ситуации.

аргументу и вогнутой (не обязательно строго) по k_i при любом значении K_i.

При рассмотрении игровых равновесий, используем концепцию положительной производственной экстерналии [9, 10, 15], которая предполагает, что в момент принятия решения агент воспринимает среду K_i как экзогенную переменную, т. е. считает, что значение параметра K_i не зависит от выбранного агентом размера собственных инвестиций k_i.

Соответственно, агент в состоянии равновесия решает следующую оптимизационную задачу $P(K_i)$:

$$U(c_i^1, c_i^2) \xrightarrow[c_i^1,\, c_i^2,\, k_i]{} \max,$$

$$\begin{cases} c_i^1 \le e - k_i, \\ c_i^2 \le F(k_i, K_i), \\ c_i^1 \ge 0,\ c_i^2 \ge 0,\ k_i \ge 0. \end{cases}$$

Первые два ограничения оптимизационной задачи $P(K_i)$ удовлетворяются как соответствующие равенства. Подставив данные ограничения в целевую функцию, получим следующую платежную функцию:

$$V(k_i, K_i) = U(e - k_i, F(k_i, K_i)).$$

Решением оптимизационной задачи $P(K_i)$ является значение k_i, которое максимизирует функцию $V(k_i, K_i)$ при ограничении $k_i \in [0, e]$ в данной среде K_i. Предположим, что функция V формально определена для любого значения $k_i \in (-\infty, +\infty)$ и строго вогнута по k_i. Тогда существует единственное стационарное решение k_i^s, оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V(k_i, K_i)}{\partial k_i} = 0. \qquad (1)$$

Если $k_i^s \in (0, e)$, то стационарное решение k_i является оптимальным решением задачи $P(k_i, K_i)$. Такое решение будем называть внутренним решением. Если $k_i^s \le 0$, то решением является $k_i = 0$. Если $k_i^s \ge e$, то решением является $k_i = e$. Решение, полученное в последних двух случаях, будем называть угловым решением.

Определение 1. Если агент не инвестирует, $k_i = 0$, он является пассивным. Если агент делает инвестиции, $0 < k_i < e$, он является активным. Если агент инвестирует все имеющиеся средства, e (и соответственно ничего не потребляет в периоде 1), он гиперактивен.

Лемма 1. Если $k_i^s \le 0$, агент пассивен: $k_i = 0$. Если $0 < k_i^s < e$, агент активен: $k_i = k_i^s$. Если $k_i^s \ge e$, агент гиперактивен: $k_i = e$.

Доказательство. Это непосредственно следует из свойств функции V.

Рассмотрим игру, игроками в которой являются агенты $i = 1, 2, ..., n$. В качестве стратегий игроков i выступают их собственные инвестиции $k_i \in [0, e]$. Соответственно, выигрыш игроков – полезность $V(k_i, K_i)$. Когда профиль стратегий $(k_1, k_2, ..., k_n)$ состоит из оптимальных решений каждого из игроков, мы говорим, что достигается равновесие по Нэшу с экстерналиями. Если все k_i, $i = 1, 2, ..., n$ являются внутренними решениями оптимизационных задач игроков, то равновесие $(k_1, k_2, ..., k_n)$ назовем внутренним равновесием. В противном случае, равновесие будет именоваться угловым. Очевидно, что внутреннее равновесие по Нэшу с экстерналиями (если оно достигается при выбранном наборе параметров) описывается следующей системой уравнений

$$\frac{\partial V(k_i, K_i)}{\partial k_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Будем использовать следующие виды функции полезности и производственной функции, которые позволяют изучить структуру равновесия в зависимости от параметров. Пусть функция полезности имеет квадратичную форму:

$$U(c_i^1, c_i^2) = c_i^1(e - ac_i^1) + dc_i^2,$$

где a, d – ее параметры, $0 < a < \frac{1}{2}$, $d > 0$. Здесь a – коэффициент насыщения. Пусть производственная функция имеет следующую форму

$$F(k, K) = gkK,$$

где $g > 0$. Отметим, что увеличение значений параметров d и g стимулирует инвестиции агентов. Будем использовать величину $A = dg$, равную произведению этих параметров, и говорить об этой величине, как о показателе продуктивности. Будем всегда предполагать, что $a < A$

Уравнение (1) для стационарного решения принимает следующую форму:

$$e(2a-1)-2ak_i+AK_i=0. \qquad (2)$$

Таким образом, если агент является активным в состоянии равновесия, то его инвестиции равны

$$k_i=k_i^s=\frac{e(2a-1)+A\tilde{K}_i}{2a-A}, \qquad (3)$$

где $\tilde{K}_i$ – экстерналия.

Определение 2. Если $A > 2a$, мы говорим о наличии продуктивности. В противоположном случае, если $A < 2a$, говорим об отсутствии продуктивности.

Примечание. В теории сетевых игр используется понятие «стратегическая дополняемость», смысл которого в том, что увеличение инвестиций соседей агента по сети приводит к увеличению инвестиций самого агента. Если же увеличение инвестиций соседей приводит к уменьшению собственных инвестиций агента, говорят о стратегической заменяемости. Стратегическая дополняемость для различных сетевых игр изучалась в [4, 11, 13, 14, 17], а стратегическая взаимозаменяемость – в [1, 7, 8]. Из формулы (3) очевидно, что при $A < 2a$ во внутреннем равновесии имеет место стратегическая дополняемость, а при $A > 2a$ – стратегическая заменяемость. В нашей модели с производством указанные неравенства означают низкий или высокий уровень производительности.

2. Поведение агента в равновесии

Следующая лемма описывает разные типы поведения агентов в равновесии в зависимости от размера получаемой экстерналии $\tilde{K}_i$.

Л е м м а 2. 1. При отсутствии продуктивности имеют место следующие необходимые и достаточные условия для разных типов поведения агента в равновесии.

Агент является пассивным тогда и только тогда, когда $\tilde{K}_i \le \frac{e(1-2a)}{A}$.

Агент является активным тогда и только тогда, когда $\frac{e(1-2a)}{A} < \tilde{K}_i < \frac{e(1-A)}{A}$. В таком случае инвестиции агента описываются уравнением (3).

Агент является гиперактивным тогда и только тогда, когда $\tilde{K}_i \ge \frac{e(1-A)}{A}$.

2. При наличии продуктивности имеют место следующие необходимые условия для разных типов поведения агента в равновесии.

Агент может быть пассивным только при условии $\tilde{K}_i \le \frac{e(1-2a)}{A}$.

Агент может быть активным только при условии $\frac{e(1-A)}{A} < \tilde{K}_i < \frac{e(1-2a)}{A}$. В этом случае инвестиции агента описываются уравнением (3).

Агент может быть гиперактивным только при условии $\tilde{K}_i \ge \frac{e(1-A)}{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индекс i для простоты записи опускаем. Рассмотрим пассивного агента со средой $K=0+\tilde{K}$. Когда агент начинает инвестировать, потребление становится равным

$$c_2=e-k,\ \ c_2=AkK.$$

Перепишем функцию полезности:

$$U(c_1,c_2)=V(k,K)=(e-k)[e-a(e-k)+AkK]=$$
$$=e^2-ke-ae^2+2kae-ak^2+Ak(0+\tilde{K}).$$

Производная полезности:

$$-e+2ae-2ak+A(0+\tilde{K}).$$

Если агент является пассивным ($k = 0$), производная имеет вид:

$$-e+2ae+A\tilde{K}.$$

Для данной производной условие равновесия с пассивным агентом следующее:

$$\tilde{K} \le \frac{e(1-2a)}{A}.$$

Рассмотрим активного агента со следующей функцией полезности:

$$U(c_1,c_2)=V(k,K)=$$
$$=e^2-ke-ae^2+2kae-ak^2+AkK.$$

Производная функции полезности:

$$-e+2ae-2ak+AK.$$

Тогда

$$k^s=\frac{e(2a-1)+A\tilde{K}}{2a-A}=\frac{e(1-2a)-A\tilde{K}}{A-2a}.$$

Если $0 < k^s < e$, агент является активным, $k = k^s$. Расписав подробно данное условие, мы получаем неравенства, упомянутые в п. 2 для обоих утверждений леммы.

Рассмотрим гиперактивного агента со средой $K = e + \tilde{K}$. В равновесии производная функции полезности должна принадлежать промежутку [0; +∞). Если такой агент начинает инвестировать меньше чем e, его потребление будет равно

$$c_1 = e - k, \;\; c_2 = AkK.$$

Функция полезности имеет вид:

$$U(c_1, c_2) = V(k, K) =$$
$$= e^2 - ke - ae^2 + 2kae - ak^2 + Ak(e + \tilde{K}).$$

Производная функции полезности:

$$-e + 2ae - 2ak + A(e + \tilde{K}).$$

Если агент является гиперактивным ($k = e$), производная полезности равна

$$-e + A(e + \tilde{K}) = e(A - 1) + A\tilde{K}.$$

Для данной производной условие равновесия с гиперактивным агентов следующее:

$$\tilde{K} \geq \frac{e(1 - A)}{A}.$$

Примечание. При условии наличия продуктивности, если $\tilde{K}_i \in \left(\frac{e(1-A)}{A}, \frac{e(1-2a)}{A} \right)$, возможны три равновесных значения параметра k_i — внутреннее решение и два угловых решения. Если $\tilde{K}_i = \frac{e(1-A)}{A}$ или $\tilde{K}_i = \frac{e(1-2a)}{A}$, возможны оба угловых решения: агент может быть либо пассивным, либо гиперактивным. Если $\tilde{K}_i < \frac{e(1-A)}{A}$, агент может быть только пассивным. Если $\tilde{K}_i > \frac{e(1-2a)}{A}$, агент может быть только гиперактивным.

3. Приспособление инвестиций активного агента

Методы анализа устойчивости в экономике описаны в [5, 16]. Примеры применения методов описаны в [2, 3, 18].

Введение динамики в модель начнем с рассмотрения процесса приспособления поведения активного агента в ситуации потери равновесия. Агент получает экстерналию $\tilde{K}_i$. Согласно лемме 2 понятие активности агента в сети с отсутствием продуктивность означает, что $e(1-2a)/A < \tilde{K}_i < (1-A)/A$, а в случае с наличием продуктивности — что $(1-A)/A < \tilde{K}_i < e(1-2a)/A$.

Предполагаем, что на начало процесса приспособления агент (индекс i опускаем) планирует собственные инвестиции k^0 и, соответственно, среду $K = k^0 + \tilde{K}$. Агент выбирает оптимальный размер инвестиций k^1 в соответствующей среде, затем наблюдает, как изменяется его среда, и выбирает оптимальный размер инвестиций k^2, соответствующий новой среде, и т. д. Согласно (2), пока агент остается активным (т. е. пока выполняются указанные выше условия), процесс приспособления описывается следующим линейным уравнением:

$$e(2a - 1) - 2ak^{n+1} + A(\tilde{K} + k^n) = 0, \;\; n = 0, 1, ...$$

Перепишем это уравнение в виде

$$k^{n+1} = \frac{e(2a - 1) + A\tilde{K}}{2a} + \frac{A}{2a} k^n, \;\; n = 0, 1, ... \quad (4)$$

Если на одной из итераций выполняется неравенство $k^{n+1} > e$, агент становится гиперактивным, если $k^{n+1} < 0$ — пассивным.

Л е м м а 3. При условии отсутствия продуктивности процесс приспособления инвестиций сходится к внутреннему устойчивому состоянию, описываемому уравнением (3). При условии наличия продуктивности рассматриваемый процесс сходится либо к 0, либо к e.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение разностного уравнения (4) имеет вид

$$k^n = k^s + \left(\frac{A}{2a} \right)^n (k^0 - k^s), \;\; n = 1, 2, ... \quad (5)$$

Очевидно, что при отсутствии продуктивности (при $A/2a < 1$) итерационный процесс сходится к устойчивому состоянию k^s.

При наличии продуктивности (при $A/2a > 1$), если $k^0 > k^S$, последовательность $\{k^n\}$, описанная в (5), увеличивается и расходится к +∞; соответственно, если $k^0 < k^S$, последовательность $\{k^n\}$ уменьшается и расходится к −∞.

Таким образом, при наличии продуктивности агент становится либо гиперактивным, если $k^0 > k^S$, либо пассивным, если $k^0 < k^S$.

4. Процесс установления нового равновесия в сети после нарушения первоначального внутреннего равновесия

Предположим, что в сети установилось внутреннее равновесие (k_1, k_2, ..., k_n). В периоде $t = 0$ произошло небольшое возмущение установленного равновесного состояния: агент i^* увеличил (уменьшил) размер собственных инвестиций в периоде 0 на некоторую небольшую величину. Иными словами, инвестиции агента i^* становятся равными $k^* = k_{i^*} + \varepsilon$ (соответственно, $k^* = k_{i^*} - \varepsilon$), где ε — малое положительное число.

Динамика модели после нарушения первоначально установившегося равновесия может быть определена следующим образом. В периоде $t = 1$ все соседи агента i^* приспосабливают размер собственных инвестиций таким образом, как это было описано в разделе 4. Их начальные размеры инвестиций обозначим k^0. В периоде $t = 2$ соседи только что указанных агентов, в том числе и сам агент i^*, также изменяют размер своих инвестиций. В периоде $t + 1$ изменяют размер своих инвестиций соседи агентов, изменявших инвестиции в периоде t.

Теорема 1. При отсутствии продуктивности, если первоначально имело место внутреннее равновесие и один из агентов увеличил (уменьшил) размер собственных инвестиций, процесс приспособления в сети сходится к угловому равновесию, в котором хотя бы один из агентов гиперактивен (пассивен).

Доказательство. Пусть в первоначальном равновесии все агенты являются активными и агент i^* увеличивает (уменьшает) размер собственных инвестиций в периоде 0. В периоде $t = 1$ рассмотрим соседа j агента i^*. Пусть в первоначальном внутреннем равновесии агент j получал экстерналию $\tilde{K}_j$; соответственно, его инвестиции составляли

$$k_j^{s0} = \frac{e(2a-1) + A\tilde{K}_j}{2a - A}.$$

В период $t = 1$ после возмущения агент получил чистую экстерналию $\tilde{K}_j + \xi$, где $\xi = \varepsilon$, если агент i^* увеличивал размер собственных инвестиций, и $\xi = -\varepsilon$, если агент i^* уменьшал размер собственных инвестиций. Соответственно, агент j делает инвестиции, равные

$$k_j = \frac{e(2a-1) + A(\tilde{K}_j + \xi)}{2a - A} = k_j^{s0} + \Delta^1,$$

где $\Delta^1 = A\xi / (2a - A)$. Таким образом, в периоде 1 размер инвестиций агента j изменился, по сравнению с размером его инвестиций при первоначальном внутреннем равновесии на добавку Δ^1, знак которой совпадает с знаком ξ и которая равна по модулю

$$\left|\Delta^1\right| = \frac{A}{2a - A}\varepsilon.$$

Согласно условию отсутствия продуктивности, а также условию $A > a$, множитель $A/(2a - A)$ больше 1. Добавка одинакова для всех соседей агента i^*.

Аналогично, в периоде 2 найдется хотя бы один агент, к размеру инвестиций которого прибавляется добавка. Добавки в периоде 2 имеют тот же знак, как и в периоде 1, и не меньше по модулю, чем величина

$$\left|\frac{A\Delta^1}{2a - A}\right| = \left(\frac{A}{2a - A}\right)^2 \varepsilon.$$

Пусть Δ^2 — максимальная по модулю добавка в периоде 2.

Аналогично, максимальной по модулю добавкой в периоде 3 является Δ^3,

$$\left|\Delta^3\right| \geq \left|\frac{A\Delta^2}{2a - A}\right| \geq \left(\frac{A}{2a - A}\right)^3 \varepsilon.$$

В периоде t максимальной по модулю добавкой является Δ^t,

$$\left|\Delta^t\right| \geq \left(\frac{A}{2a - A}\right)^t \varepsilon.$$

Из этого следует, что при $\xi > 0$ с каждым шагом значение добавки будет увеличиваться с множителем $A/(2a - A)$, пока один из агентов не получит такую большую добавку, что превратится в гиперактивного агента. Соответственно, при $\xi < 0$ с каждым шагом значение добавки будет уменьшаться, до тех пор, пока один из агентов получит настолько малую добавку, что превратится в пассивного агента.

Следствие 1. При отсутствии продуктивности и $A \geq 1/2$, если в первоначально установившемся внутреннем равновесии один из агентов увеличивает размер собственных инвестиций, процесс уравновешивания сходится к угловому равновесию, в котором все агенты сети гиперактивны.

Доказательство. Согласно теореме 1 в процессе приспособления хотя бы один агент i^h становится гиперактиным. Если j является соседом i^h, агент j получает экстерналию

$$\tilde{K}_j \geq e > e\frac{1-A}{A}.$$

(Поскольку $A \geq 1/2$, очевидно $(1 - A)/A < 1$). Следовательно, согласно лемме 2 агент j становится гиперактивным. В результате все агенты сети становятся гиперактивными.

Условие следствия 1 можно ослабить следующим образом.

Следствие 2. Пусть m – минимальное число соседей в сети. При отсутствии продуктивности и $A \geq 1/(m + 1)$ (т. е. если $m \geq (1 - A)/A$), если первоначально имеет место внутреннее равновесие, а затем один из агентов увеличивает размер собственных инвестиций, процесс приспособления сходится к угловому равновесию, в котором все агенты гиперактивны.

Доказательство. Согласно теореме 1 в процессе нахождения нового равновесия хотя бы один из агентов становится гиперактивным. Оставшиеся активными агенты продолжают изменять размер собственных инвестиций. Так каждый агент j становится либо гиперактивным, либо окруженным, по крайней мере, m гиперактивными соседями. В последнем случае агент получает экстерналию

$$\tilde{K}_j \geq me \geq \left(\frac{1-A}{A}\right)e.$$

Аналогично доказательству следствия 1, все агенты сети становятся гиперактивными.

Следствие 3. При отсутствии продуктивности процесс приспособления, который происходит при уменьшении размера инвестиций одного из агентов установившегося внутреннего равновесия, сходится к угловому равновесию, в котором все агенты сети пассивны.

Доказательство. Согласно теореме 1 в процессе приспособления хотя бы один из агентов становится пассивным. Оставшиеся активными агенты продолжают изменять размер собственных инвестиций. Таким образом, любой агент сети j становится либо пассивным, либо окруженным пассивными соседями. В последнем случае агент получает нулевую экстерналию и согласно лемме 2 становится пассивным. В итоге все агенты сети становятся пассивными.

Теорема 2. При наличии продуктивности, если в первоначальном внутреннем равновесии один из агентов увеличивает (уменьшает) размер своих инвестиций, процесс приспособления сходится к угловому равновесию, в котором все агенты гиперактивны (пассивны).

Доказательство. Пусть агент i^* увеличил размер собственных инвестиций. Затем согласно (3) для его соседей j размер инвестиций в состоянии равновесия k_j^s уменьшается, по сравнению с начальным размером k_j^{s0}. Согласно лемме 3 агент j начинает регулировать собственные инвестиции $k_0 = k_j^{s0} > k_j^s$ и постепенно становится гиперактивным. Аналогично, оставшиеся агенты сети становятся гиперактивными.

Если агент i^* первоначально недоинвестирует, то, аналогично предыдущему, агенты становятся пассивными.

Примеры

Пример 1. В табл. 1 показан процесс приспособления в случае полной сети при $n = 3$ со следующими значениями параметров: $a = 0{,}472$, $A = 0{,}7$, $e = 1$. Таким образом, имеет место отсутствие продуктивности и выполняется следствие 1. Первоначально сеть находится во внутреннем равновесии. В периоде $t = 1$ агент $i^* = 1$ увеличивает размер собственных инвестиций, по сравнению с начальным инвестированием, на ε. Рассмотрены случаи $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$.

Обозначим k^s – размер инвестиций каждого агента в первоначальном равновесном состоянии; $k_1^s + \varepsilon$ – размер инвестиций агента 1 после увеличения; k_j^1 – новый размер инвестиций соседей агента 1 после увеличения размера инвестиций последним; k_1^2 – измененный размер инвестиций агента 1 после изменения в инвестировании его соседей и т. д. В таблице показано, каким образом постепенно процесс приспособления сходится к угловому равновесию, в котором все агенты являются гиперактивными.

Таблица 1

ε	k^s	$k_1^s+\varepsilon$	$k_j^1,\ j=2,3$	k_1^2	$k_j^3,\ j=2,3$
10^{-4}	0,0480769	0,0481769	0,0483809	0,0498179	0,0539329
10^{-5}	0,0480769	0,0480869	0,0481232	0,048342	0,0489685
10^{-6}	0,0480769	0,0480779	0,0480974	0,0481942	0,0484714
10^{-7}	0,0480769	0,0480770	0,0480948	0,0481793	0,0484213

k_1^4	$k_j^5,\ j=2,3$	k_1^6	$k_j^7,\ j=2,3$	k_1^8	$k_j^9,\ j=2,3$
0,0816157	0,1608892	0,6941836	e	e	e
0,0531832	0,0652526	0,1464467	0,3789571	e	e
0,0503362	0,0556763	0,0916006	0,1944748	0,8865375	e
0,0500493	0,0547113	0,0860738	0,1758846	0,7800663	e

Таблица 2

ε	k^s	$k_1^s-\varepsilon$	$k_j^1,\ j=2,3$	k_1^2	$k_j^3,\ j=2,3$
10^{-4}	0,0480769	0,0479769	0,0477904	0,0464359	0,0425571
10^{-5}	0,0480769	0,0480669	0,0480482	0,0479124	0,0475235
10^{-6}	0,0480769	0,0480759	0,0480739	0,0480596	0,0480187
10^{-7}	0,0480769	0,0480768	0,0480765	0,0480745	0,0480688

k_1^4	$k_j^5,\ j=2,3$	k_1^6	$k_j^7,\ j=2,3$	k_1^8	$k_j^9,\ j=2,3$
0,0164634	0	0	0	0	0
0,0449073	0,0374155	0	0	0	0
0,0477435	0,0469554	0,0416537	0,0264715	0	0
0,0480304	0,0479204	0,0471805	0,0450617	0,0308079	0

Пример 2. В табл. 2 аналогичным образом показана динамика приспособления после уменьшения размера инвестиций агента 1. Процесс сходится к угловому равновесию, в котором все агенты сети являются пассивными.

Выводы. В качестве отправной точки для нашего исследования использована модель [12], в которой описывается ситуация, когда агенты в сетевой структуре в первом временном периоде инвестируют какой-либо ресурс (это могут быть деньги или время) с тем, чтобы во втором временном периоде получить выгоду от произведенного инвестирования. Примерами сетевых структур, подходящих под рассмотренную модель, являются семьи, поселения, фирмы, страны, международные организации, их функционирование.

Мы ввели динамику в модель и рассмотрели проблему устойчивости внутреннего равновесия в сети.

Важным фактом, который мы обнаружили в нашем исследовании, является роль условий наличия или отсутствия продуктивности в сетевой структуре, как для статической формы модели (лемма 2), так и для динамической формы (лемма 3, теоремы 1 и 2). Как отмечено в п. 1 статьи, эти условия соответствуют условиям стратегической заменяемости и стратегической дополняемости, которые часто используются при анализе сетевых игр, однако до сих пор действие этих условий не сравнивалось в рамках одной модели.

Доказано, что при отсутствии продуктивности, если первоначально имеет место внутреннее равновесие, процесс приспособления, который начинается после увеличения (уменьшения) размера собственных инвестиций одного из агентов, сходится к угловому равновесию, в котором хотя бы один агент гиперактивен (пассивен). Отличие в том, что при наличии продуктивности все агенты сети, в конце концов, становятся гиперактивными (пассивными), тогда как при отсутствии продуктивности, при определенном наборе параметров, возможно асимметричное равновесие, при котором некоторые агенты сети остаются активными.

Модель раскрывает механизм распространения нарастающего изменения поведения участников сети в случае, когда это изменение не гасится внешним регулированием.

Как нам представляется, неустойчивость внутреннего равновесия, которую мы обнаружили в модели, является характерной чертой социальных и экономических систем. По нашему мнению, возможное объяснение наличия многих реально существующих социальных институтов связано именно с желанием членов общества сохранить достигнутое равновесие при его динамической неустойчивости, которая проявилась бы при отсутствии таких стабилизирующих институтов.

В данной статье представлена лишь динамика, которая наблюдается в сети после небольшого возмущения равновесия. Предложенные методы можно использовать при дальнейших исследованиях динамики в сетях. Полученные результаты могут быть применены при изучены динамики реально существующих социальных, экономических и политических сетей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bramoull'e Y., Kranton R.** Public goods in networks // J. Econ. Theory, 2007, vol. 135, pp. 478–494.
2. **Cao J., Xiao M.** Stability and Hopf bifurcation in a simplified BAM neutral network with two time delays // IEEE Transactions on Neural Networks, 2007, vol. 18, is. 2, pp. 416–430.
3. **Cheng C.Y., Lin K.H., Shin C.W.** Multistability in recurrent neural networks // SIAM Journal on Applied Mathematics, 2006, vol. 66, is. 4, pp. 1301–1320.
4. **Bulow J., Geanakoplos J., Klemperer P.** Multimarket oligopoly: strategic substitutes and complements // J. Polit. Econ. 1985, vol. 93, no. 3, pp. 488–511.
5. **Chiang A.C.** Fundamental Methods of Mathematical Economics. 3-rd ed. McGrow-Hill, New York, 1984.
6. **Jackson M.O.** Social and economic networks. Princeton University Press, Princeton, 2008.
7. **Jackson M.O., Zenou Y.** Games on networks // Handbook of game theory with economic applications. Ed. by Young P., Zamir S. eds., 2015, vol. 4, pp. 95–164.
8. **Grossman G., Maggi G.** Diversity and trade // Am. Econ. Rev., 2014, vol. 90, pp. 1255–1275.
9. **Korolev A.V., Matveenko V.D.** Structure of equilibrium time-varying trajectories in the Lucas endogenous growth model // Automation and Remote Control, 2006, vol. 67, is. 4, pp. 624–633.
10. **Lucas R.** On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics, 1988, vol. 22, is. 1, pp. 3–42.
11. **Martemyanov Y.P., Matveenko V.D.** On the dependence of the growth rate on the elasticity of substitution in a network // Int. Journal of Process Management and Benchmarking, 2014, vol. 4, no. 4, pp. 475–492.
12. **Matveenko V., Korolev A.** Network game with production and network externalities // Contributions to Game Theory and Management, 2015, vol. 8, pp. 199–222.
13. **Milgrom P., Roberts J.** The economics of modern manufactoring: technology, strategy, and organization // Am. Econ. Rev., 1990, vol. 80, pp. 511–518.
14. **Milgrom P., Roberts J.** Complementarities and systems: understanding japanese economic organization // Estud. Econ., 1994, vol. 9, pp. 3–42.
15. **Romer P.M.** Increasing returns and long-run growth // Journal of Political Economy, 1986, vol. 94, no. 5, pp. 1002–1037.
16. **Takayama A.** Analytical methods in economics. Harvester Wheat Sheaf, New York, 1994.
17. **Topkis D.M.** Supermodularity and complementarity. Princeton University Press, Princeton, 1998.
18. **Xu B., Liu X., Liao X.** Global asymptotic stability of high-order Hopfield type neural networks with time delays // Computers and Mathematics with Applications, 2003, vol. 45, is. 10, pp. 1729–1737.

REFERENCES

1. **Bramoull'e Y., Kranton R.** Public goods in networks. *J. Econ. Theory*, 2007, vol. 135, pp. 478–494.

2. **Cao J., Xiao M.** Stability and Hopf bifurcation in a simplified BAM neutral network with two time delays. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2007, vol. 18, is. 2, pp. 416–430.

3. **Cheng C.Y., Lin K.H., Shin C.W.** Multistability in recurrent neural networks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2006, vol. 66, is. 4, pp. 1301–1320.

4. **Bulow J., Geanakoplos J., Klemperer P.** Multimarket oligopoly: strategic substitutes and complements. *J. Polit. Econ.* 1985, vol. 93, no. 3, pp. 488–511.

5. **Chiang A.C.** Fundamental Methods of Mathematical Economics. 3-rd ed. McGrow-Hill, New York, 1984.

6. **Jackson M.O.** Social and economic networks. Princeton University Press, Princeton, 2008.

7. **Jackson M.O., Zenou Y.** Games on networks. *Handbook of game theory with economic applications*. Ed. by Young P., Zamir S. eds., 2015, vol. 4, pp. 95–164.

8. **Grossman G., Maggi G.** Diversity and trade. *Am. Econ. Rev*., 2014, vol. 90, pp. 1255–1275.

9. **Korolev A.V., Matveenko V.D.** Structure of equilibrium time-varying trajectories in the Lucas endogenous growth model. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, is. 4, pp. 624–633.

10. **Lucas R.** On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 1988, vol. 22, is. 1, pp. 3–42.

11. **Martemyanov Y.P., Matveenko V.D.** On the dependence of the growth rate on the elasticity of substitution in a network. *Int. Journal of Process Management and Benchmarking*, 2014, vol. 4, no. 4, pp. 475–492.

12. **Matveenko V., Korolev A.** Network game with production and network externalities. *Contributions to Game Theory and Management*, 2015, vol. 8, pp. 199–222.

13. **Milgrom P.,** Roberts J. The economics of modern manufactoring: technology, strategy, and organization. *Am. Econ. Rev.*, 1990, vol. 80, pp. 511–518.

14. **Milgrom P., Roberts J.** Complementarities and systems: understanding japanese economic organization. *Estud. Econ.*, 1994, vol. 9, pp. 3–42.

15. **Romer P.M.** Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 1986, vol. 94, no. 5, pp. 1002–1037.

16. **Takayama A.** Analytical methods in economics. Harvester Wheat Sheaf, New York, 1994.

17. **Topkis D.M.** Supermodularity and complementarity. Princeton University Press, Princeton, 1998.

18. **Xu B., Liu X., Liao X.** Global asymptotic stability of high-order Hopfield type neural networks with time delays. *Computers and Mathematics with Applications*, 2003, vol. 45, is. 10, pp. 1729–1737.

МАТВЕЕНКО Владимир Дмитриевич – департамент экономики, Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербургский филиал, профессор Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», доктор физико-математических наук.

190008, ул. Союза Печатников, д. 16, Санкт-Петербург, Россия. Тел.: 8(921)380-83-02. E-mail: vmatveenko@hse.ru

MATVEENKO Vladimir D. – department of economics, the St. Petersburg School of Economics and Management, National Research University Higher School of Economics, Head of the Department of Economics of the Faculty «St. Petersburg School of Economics and Management.

190008. Soyuza Pechatnikov str. 16. St. Petersburg. Russia. E-mail: vmatveenko@hse.ru

КОРОЛЁВ Алексей Васильевич – департамент прикладной математики и бизнес-информатики, Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербургский филиал, доцент Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», канд. физ.-мат. наук.

190008, ул. Союза Печатников, д. 16, Санкт-Петербург, Россия. Тел.: 8(921)393-83-34. E-mail: danitschi@gmail.com

KOROLEV Aleksei V. – Department of Applied Mathematics and Business Informatics, the St. Petersburg School of Economics and Management, National Research University Higher School of Economics.

190008. Soyuza Pechatnikov str. 16. St. Petersburg. Russia. E-mail: danitschi@gmail.com

АЛФИМОВА Анастасия Андреевна – департамент экономики, Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербургский филиал, студентка, без степени.

190008, ул. Союза Печатников, д. 16, Санкт-Петербург, Россия. Тел.: 8(950)041-30-09. E-mail: alfimova.nastena@mail.ru

ALFIMOVA Anastasia A. – department of economics, the St. Petersburg School of Economics and Management, National Research University Higher School of Economics, student.

190008. Soyuza Pechatnikov str. 16. St. Petersburg. Russia. E-mail: alfimova.nastena@mail.ru