



**В.К. Тютюкин**

**МИНИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ЦИКЛА  
ПРИ НАЛИЧИИ ПЕТЕЛЬ В МАРШРУТЕ РОБОТА**

**V.K. Tutukin**

**MINIMIZATION OF THE PRODUCTION CYCLE  
IN THE PRESENCE OF LOOPS IN THE ROBOT ROUTE**

Рассматривается задача организации производственного процесса на роботизированной линии. Кратко изложен организационно-технический аспект этой задачи. Основное внимание уделено развитию ее экономико-математического аспекта, предполагающего выбор некоторой целевой функции и ее оптимизацию. Использование на линии дорогостоящего оборудования выдвинуло требование сведения к минимуму его простоев. Учету указанного требования способствует выбор в модели в качестве целевой функции длительности производственного цикла, которую следует минимизировать. Построение оптимального календарного графика (расписания) работы линии сведено к нахождению маршрута движения робота-многостаночника в процессе обслуживания им всего остального оборудования. Новшеством при этом является замена традиционно рассматриваемого прямолинейного маршрута движения робота на маршрут с петлями, что и позволяет во многих случаях сократить длительность производственного цикла. Минимизация целевой функции на таком множестве маршрутов робота потребовала разработки вспомогательной задачи, названной задачей о пометке чисел. Эта специфическая задача является пока уникальной, узкоспециализированной, но она может найти применение и в других ситуациях. Ее можно отнести к классу задач теории расписаний (т. е. дискретной оптимизации), а именно, к оптимизации функций, заданных на сочетаниях. Подробно описана ситуация возникновения этой задачи и ее строгая постановка. В статье приведено ее решение, а также построение оптимального календарного графика работы роботизированной линии проиллюстрировано на конкретных численных данных.

**РОБОТИЗИРОВАННАЯ ЛИНИЯ; МНОГОСТАНОЧНОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ; ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПИСАНИЕ; ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ; ОПТИМАЛЬНОЕ СОЧЕТАНИЕ.**

In this paper we consider the problem of the production process on the robotic line (RL). Organizational and technical aspects of this problem are summarized. Main attention is paid to development of its economic and mathematical aspects, which involves choosing a target function (TF) and its optimization. Using expensive equipment on the RL calls for minimizing its downtime. Consideration of these requirements is contributed by choosing the production cycle as a CP length, which should be minimized. Construction of an optimal timetable (schedule) of the RL work is reduced by the author to finding the route of the multi-tasking robot when it is servicing the rest of the RL equipment. The novelty in this case is replacement of the traditionally considered straight route for the robot route with loops, which in many cases allows reducing duration of the production cycle. Minimizing FIT on so many robot routes demanded, as shown in the article, elaboration of an auxiliary problem, which the author names the problem of marking numbers. This particular task is still unique and highly specialized, but it can be used in other situations as well. It can be referred to the class of scheduling theory problems (i.e., discrete optimization), namely, optimization of functions that are set on combinations. The paper describes in detail the situation of this problem occurrence and its strict formulation. Its solution has not been previously shown. In this paper this gap is filled in. The solution to this problem, as well as construction of the optimal calendar schedule of the robotic line operation is illustrated by specific numerical data.

**ROBOTIC LINE; MULTIPLE-MACHINE SERVICE; OPTIMAL SCHEDULE; DISCRETE OPTIMIZATION; OPTIMAL COMBINATION.**

*Введение.* Роботизированные линии (РЛ) как один из видов роботизированных комплексов находят все большее применение в различных отраслях промышленности — тяжелой (более всего в машиностроении, причем, на всех трех стадиях производства — заготовительной,

обрабатывающей и сборочной) и легкой (текстильной, швейной и обувной). В связи с этим задача организации производственного процесса на таких линиях является весьма актуальной. Однако в литературе, как учебной (например, [1–6]), так и научной (например, [7–10]), пре-

обладает изложение организационно-технического аспекта этой задачи.

Использование на РЛ дорогостоящего оборудования: станков с ЧПУ — для выполнения основных, технологических, операций и промышленных роботов (ПР) — для выполнения вспомогательных (погрузо-разгрузочных и транспортных) операций выдвинуло требование снижения его простоев до объективно неизбежного уровня, а следовательно рассмотрения и экономико-математического аспекта задачи (см., например, [11–15]). Для учета указанного требования выбирается традиционная целевая функция (ЦФ) — длительность производственного цикла, которую следует минимизировать. Этот критерий является достаточно комплексным, ибо он способствует улучшению значений и нескольких других важных экономических показателей функционирования РЛ — повышению коэффициента загрузки основного оборудования, повышению производительности, сокращению затрат.

Указанную ЦФ предлагается рассматривать заданной на множестве некоторых маршрутов движения робота в процессе обслуживания (выполнения погрузо-разгрузочных и транспортных операций) им всего остального оборудования на РЛ [14, 15].

*Методика и результаты исследования.* В [14] нами найдено решение этой задачи (минимизация производственного цикла, нахождение оптимального календарного графика, расписания) для случая прямолинейного маршрута движения ПР. В [15] рассмотрен случай, когда в маршруте движения ПР допускаются петли единичной длины от некоторых станков: найден явный вид целевой функции и рассмотрена ее минимизация для случая наличия петель от всех внутренних станков, что позволяет в некоторых случаях (как показано на численном примере) находить улучшенные расписания. Эта минимизация потребовала разработки и решения специфической задачи, названной нами задачей о пометке чисел, относящейся к классу задач дискретной оптимизации — оптимизации функций, заданных на сочетаниях. Приведена ситуация ее возникновения, однако решение ее не было приведено. В данной статье этот пробел восполнен, но предварительно кратко воспроизведена ситуация возникновения указанной специфической задачи — задачи о пометке чисел.

### Предварительные сведения и результаты.

Указанная задача рассматривается применительно к роботизированной линии, т. е. такому роботизированному комплексу, который выполняет несколько разнотипных технологических операций. Пусть  $n$  есть число этих операций. Считаем, что для выполнения каждой из них имеется только один соответствующий станок, т. е. дублирующего оборудования на операциях нет. Тогда  $n$  есть одновременно и число станков на линии. Любой экземпляр детали должен пройти в процессе его изготовления все  $n$  технологических операций (станков) в требуемой их последовательности.

В структуру (технический состав) РЛ входит, помимо основного оборудования (станков), следующее вспомогательное оборудование. Перед каждым станком имеется свое дополнительное устройство (ДУ), предназначенное для временного хранения на нем межоперационного оборотного задела. Емкость его будем предполагать единичной (т. е. на одну штуку). В состав РЛ входят также питатель (П), накопитель (Н) и ПР. П располагается перед станком 1 и предназначается для размещения в нем заготовок; Н располагается после станка  $n$  и предназначается для размещения в нем изготовленных РЛ деталей; ПР предполагается подвижным и предназначается для обслуживания (выполнения погрузо-разгрузочных и транспортных операций) всего остального оборудования линии. Пространственное размещение всего оборудования РЛ показано на рис. 1.

Исходными данными для РЛ являются (помимо уже указанного  $n$  — числа операций или станков) следующие величины:  $a_i$  — штучное время изготовления детали на  $i$ -м станке ( $i = 1 : n$ );  $d_i$  — время перехода робота от  $i$ -го станка к  $(i + 1)$ -му, или наоборот ( $i = 1 : n - 1$ ). Заметим, что величины  $a_i$  являются агрегированными, т. е. они состоят из многочисленных времен погрузо-разгрузочных работ основного и вспомогательного оборудования РЛ. Это агрегирование подробно изложено в [14, с. 170] и поэтому здесь опускается. Заметим также, что если робот движется от  $i$ -го станка к  $(i + 1)$ -му с деталью, то  $d_i$  есть одновременно и время транспортировки детали от  $i$ -го станка к  $(i + 1)$ -му ( $i = 1 : n - 1$ ).

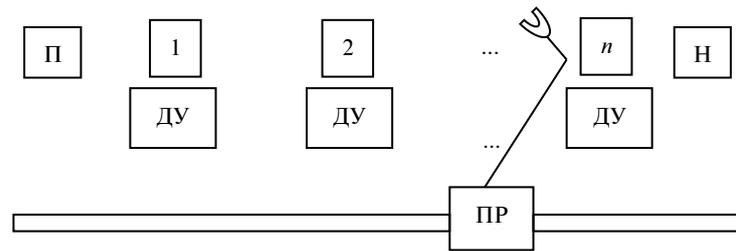


Рис. 1. Пространственное размещение оборудования РЛ

Ставится задача построения оптимального расписания, т. е. календарного графика (КГ) работы РЛ. При этом в качестве целевой функции, которую надо минимизировать, выбирается  $\pi$  — величина цикла, т. е. периода оборота (повторения) производственного процесса на РЛ.

На протяжении отрезка времени  $\pi$  ПР должен полностью обслужить все  $n$  имеющихся на линии станков, т. е. выполнить для каждого из них следующие четыре организационные вспомогательные операции: доставка заготовки или детали к станку; загрузка станка соответственно заготовкой или деталью; разгрузка станка (по окончании изготовления детали на нем); унос детали, изготовленной на данном станке, на следующую рабочую позицию.

Маршрут движения робота от первого станка до возвращения к нему в конце цикла можно разбить на две части: путь от первого станка до последнего ( $1 \rightarrow n$ ) — путь «туда» (вперед) и путь от последнего станка к первому ( $n \rightarrow 1$ ) — путь «обратно» (назад). Заметим, что в любой схеме обслуживания доставка и унос детали для любой рабочей позиции (станка и ДУ) необходимо должны быть выполнены на пути «туда».

Для РЛ вместо точного (подробного) календарного графика, являющегося достаточно громоздким (ибо в нем должно быть отражено обслуживание всего оборудования, как основного, так и вспомогательного), будем рассматривать с целью упрощения расчета целевой функции упрощенный (приближенный) КГ, что приводит лишь к незначительной погрешности. Правила упрощения в КГ работы как любого станка, так и ПР подробно изложены в [14, с. 170] и поэтому здесь опускаются.

Для станка 1 целесообразно применить, как показано в [14, с. 173, 174, рис. 5, а],

следующий вариант его полного обслуживания: на пути «туда» осуществляется загрузка станка, разгрузка же его производится на пути «обратно». Для станка  $n$  целесообразно применить, как показано в [14, с. 175, рис. 6, б], следующий вариант его полного обслуживания: на пути «туда» осуществляется разгрузка станка, загрузка же его производится на пути «обратно». Для полного же обслуживания любого внутреннего станка ( $i = 2 : n - 1$ ), т. е. выполнения всех четырех обслуживающих операций для него, в маршруте движения робота на пути «туда» введем петлю единичной длины, т. е. к одному из соседних с ним станков — к последующему или предыдущему, в начале которой осуществляется разгрузка этого станка, а в конце — его загрузка. Для данного станка будем соответственно называть их петлей вниз и петлей вверх и иметь вариант 1 и вариант 2 его обслуживания. Затрачиваемое на указанные петли время для станка  $k$  равно соответственно  $2d_k$  и  $2d_{k-1}$ .

Заметим следующее. При совершении от данного станка петли в определенном направлении (вниз или вверх) для соответствующего соседнего станка (последующего или предыдущего) получается петля с противоположным направлением (вверх или вниз). Таким образом, петля обладает свойством взаимности, т. е. она имеется одновременно для пары соседних станков. Эту петлю между двумя смежными станками можно использовать для обслуживания сразу обоих этих станков (первого — по варианту 1, второго — по варианту 2), но только в том случае, если эта петля делается на пути обратно [15, с. 204, 206, 207]. Обслуживание с помощью петли на пути «обратно» является, по существу, еще одним вариантом (вариантом 3) обслуживания сразу пары смежных станков. Его использование позволяет сократить количество

петель, а следовательно и время движения робота и время всего цикла.

Как отмечено, крайние станки (1 и  $n$ ) обслуживаются только по одному своему варианту и, следовательно, для них свободы выбора не существует. Пусть  $M$  есть множество внутренних станков ( $M = \{2, 3, \dots, n-1\}$ ). Допустим, что в процессе движения от станка к станку робот совершает единичные петли от всех этих станков, и тогда для каждого из них должен быть выбран один из указанных выше вариантов 1 или 2 его обслуживания. При этом можно считать, что для станка 2 применяется вариант 1 (петля вниз), а для станка  $n-1$  вариант 2 (петля вверх) [15, с. 208–209]. Можно считать, что ЦФ ( $\pi$ ) определена на всевозможных подмножествах (сочетаниях)  $S$  ( $S \subset M$ ) станков, обслуживаемых по варианту 1 ( $2 \in S, n-1 \notin S$ ) ( $\pi(S) \rightarrow \min$ ). Остальные же станки множества  $M$ , образующие подмножество  $\bar{S}$  ( $\bar{S} = M \setminus S$ ), обслуживаются по варианту 2 ( $2 \notin \bar{S}, n-1 \in \bar{S}$ ). ЦФ имеет следующий явный вид ([15, с. 215]):

$$\pi(S) = \max \left[ 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} d_i + \sum_{i \in S, i+1 \in \bar{S}} d_i \right), \max(a_1, a_n), \max_{i \in S} (a_i + 2d_i), \max_{i \in \bar{S}} (a_i + 2d_{i-1}) \right]. \quad (1)$$

Обозначим величины  $2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} d_i + \sum_{i \in S, i+1 \in \bar{S}} d_i \right)$  и  $\max_{i \in S} (a_i + 2d_i), \max_{i \in \bar{S}} (a_i + 2d_{i-1})$ , стоящие в этой формуле под знаком внешнего максимума, соответственно через  $D(S)$  и  $\Pi(S)$ . В выражении для  $D(S)$  (времени движения робота) первое слагаемое соответствует поступательному движению робота («туда» и «обратно»). Второе слагаемое соответствует всем петлям, и так как каждая петля должна быть учтена во времени движения лишь один раз (даже если она используется для обслуживания двух станков), то суммирование производится по тем  $i$ , для которых  $i \in S$  и/или  $i+1 \in \bar{S}$ . Величина  $\Pi(S)$  есть максимальный вклад станков (обеих групп –  $S$  и  $\bar{S}$ ) в ЦФ. Как видим из формулы (1), для решения задачи  $\pi(S) \rightarrow \min$  достаточно решить задачу  $\max [D(S), \Pi(S)] \rightarrow \min$ . При

решении этой задачи рассмотрим сначала решение двух следующих задач:  $\Pi(S) \rightarrow \min$  и  $D(S) \rightarrow \min$ .

Решение первой задачи очевидно – для каждого из внутренних станков достаточно выбрать кратчайшую петлю. Следовательно, оптимальное сочетание  $S^*$  есть множество тех станков, для которых кратчайшая петля направлена вниз и соответственно  $\bar{S}^*$  есть множество тех станков, для которых кратчайшая петля направлена вверх.

Для решения второй задачи, очевидно, достаточно минимизировать суммарную продолжительность всех петель в маршруте движения робота, что равносильно решению задачи  $P(S) = \sum_{i \in S, i+1 \in \bar{S}} d_i \rightarrow \min$ . Сведем ее к следующему. Рассмотрим последовательность чисел:

$$d_2, d_3, \dots, d_{n-2}. \quad (2)$$

Будем рассматривать некоторые сочетания  $C$  ее элементов и помечать их в (2) каким-либо образом (например, обводить кружком). Для введения соответствия между сочетаниями  $S$  и  $C$  следует рассматривать только такие сочетания (пометки)  $C$ , для которых нет двух подряд не помеченных в (2) чисел. Это требование вытекает из того, что петли делаются от всех (внутренних) станков. Таким образом, можно ввести понятия допустимой пометки чисел в последовательности (2), а именно: пометка чисел последовательности (2) называется допустимой, если подряд не помеченных чисел в ней может быть только одно.

Как известно ([15, с. 216–217]), между сочетаниями станков  $S$  и допустимыми пометками  $C$  чисел в последовательности (2) может быть установлено взаимно-однозначное соответствие ( $S \leftrightarrow C$ ). Поэтому задачу  $P(S) \rightarrow \min$  можно заменить на эквивалентную задачу  $P(C) = \sum_{i \in C} d_i \rightarrow \min$ , которую назовем зада-

чей о пометке чисел в последовательности (2). Таким образом, оптимальной пометкой является такая допустимая пометка, в которой сумма помеченных чисел минимальна.

**Постановка и решение вспомогательной задачи – задачи о пометке чисел.** Пусть имеем последовательность чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n. \quad (3)$$

Сочетание (пометку) чисел этой последовательности назовем допустимым, если из подряд непомеченных чисел в нем может быть только одно, а допустимое сочетание назовем оптимальным, если сумма помеченных чисел минимальна. Требуется найти оптимальную пометку.

Отметим следующие свойства оптимальной пометки (необходимые и достаточные условия оптимальности).

1. В оптимальной пометке не могут оказаться помеченными более двух чисел подряд.

Действительно, если имеем пометку трех чисел подряд  $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}$ , то, убрав пометку числа  $\alpha_{k+1}$ , получим тем самым допустимую и улучшенную пометку.

2. Если в оптимальной пометке оказались помеченными два подряд числа, то одно из них является локальным минимумом (т. е. не бóльшим обоих своих соседних чисел) в последовательности (3).

Действительно, пусть помеченными оказались числа  $\alpha_k$  и  $\alpha_{k+1}$ . В случае  $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$  имеем  $\alpha_{k-1} < \alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ , причем число  $\alpha_{k-1}$  по свойству 1 является непомеченным. Убрав пометку числа  $\alpha_k$  и пометив число  $\alpha_{k-1}$ , получим тем самым допустимую и улучшенную пометку. В случае  $\alpha_k \geq \alpha_{k+1}$  доказательство аналогично.

Свойства 1 и 2 позволяют исключить из рассмотрения заведомо неоптимальные пометки, т. е. дать следующее более жесткое определение допустимой пометки: *пометка чисел последовательности (3) называется допустимой, если числа в ней помечаются через одно, за исключением окрестностей локальных минимумов, где могут помечаться и два подряд числа — сам локальный минимум и один из его соседей.*

Это новое определение значительно сужает множество допустимых пометок, но сохраняет оптимальную пометку на исходном, более широком, множестве допустимых пометок. Продолжим установление свойств оптимальной пометки.

3. Решение задачи об оптимальной пометке обладает свойством симметрии, т. е. оно не изменится, если числа исходной последовательности (3) расположить в обратном порядке. Поэтому всякое утверждение для головной части  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  ( $1 < k < n$ )

последовательности (3) справедливо и для хвостовой ее части.

Пусть последовательность (3) разбита на две части — головную  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  и хвостовую  $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n$ . Связь решения задачи для всей последовательности (3) и решений для головной и хвостовой ее частей устанавливается следующими достаточно очевидными свойствами.

4. Необходимое условие оптимальности: если в оптимальной пометке в последовательности чисел (3) число  $\alpha_{k+1}$  оказалось помеченным, то имеющаяся пометка в головной части  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  является оптимальной в этой подзадаче.

Отметим, что число  $\alpha_k$  при этом может быть любым — как помеченным, так и непомеченным.

5. Достаточное условие оптимальности: если имеется оптимальная пометка в головной части  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  последовательности (3), причем, последнее число в ней ( $\alpha_k$ ) оказалось помеченным, то для нахождения оптимальной пометки во всей последовательности (3) достаточно найти оптимальную пометку в ее хвостовой части  $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n$ .

Таким образом, если удастся построить оптимальную пометку в некоторой головной части последовательности чисел, то эту головную часть можно отбросить и решать задачу для хвостовой части, т. е. возможно уменьшение размерности (количества чисел в последовательности) задачи. При этом решение общей задачи «склеивается» из решений частных задач.

Установим возможность решения задачи для некоторой головной части исходной последовательности чисел (3).

Будем составлять две суммы чисел этой последовательности нарастающим итогом каждую — сумму чисел, стоящих на нечетных местах, и сумму чисел, стоящих на четных местах:

$$F_k = \alpha_k + \alpha_{k-2} + \alpha_{k-4} + \dots + \alpha_{2(1 - \lfloor k/2 \rfloor)} = \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} \alpha_{k-2i} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Исходная последовательность (3) может быть такова, что внутри ее локального минимума нет или он есть.

В первом случае последовательность растет до максимума  $\alpha_M$ , а затем убывает:  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{M-1} \leq \alpha_M \geq \alpha_{M+1} \geq \dots \geq \alpha_{n-1} \geq \alpha_n$ .

Тогда согласно определению допустимой пометки имеем только две допустимые пометки: при одной из них помечаются числа на нечетных местах (нечетная пометка), при другой – на четных (четная пометка). Таким образом, оптимальная пометка определяется слагаемыми, вошедшими в ту из двух сумм  $F_n$  и  $F_{n-1}$ , которая не больше другой из них.

Во втором случае обозначим через  $r$  количество локальных минимумов в последовательности (3), а через  $m_i$  – номер  $i$ -го из них ( $i = 1: r$ ). Тогда имеем  $m_1 < m_2 < \dots < m_i < \dots < m_r$  и, следовательно, локальные минимумы  $\alpha_{m_i}$  ( $i = 1: r$ ) располагаются в последовательности (3) следующим образом:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_2}, \dots, \alpha_{m_i}, \dots, \alpha_{m_r}, \dots, \alpha_n$$

На участке этой последовательности от одного локального минимума до следующего за ним локального минимума числа сначала не убывают (до соответствующего локального максимума), а затем не возрастают. Пусть то же самое имеет место и для крайних участков:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_1} \text{ и } \alpha_{m_r}, \alpha_{m_r+1}, \dots, \alpha_n$$

Тогда на участке  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_1-1}$  ввиду отсутствия внутри него локального минимума имеем, согласно определению допустимой пометки, только нечетную и четную пометки. Заметим, что для этого участка имеем возрастающую последовательность сумм:

$$F_1 < F_2 < \dots < F_{M_1}, \quad (4)$$

где  $M_1$  – номер локального максимума на рассматриваемом начальном участке.

На следующих участках чисел от одного локального минимума до следующего в допустимой пометке согласно ее определению могут оказаться уже два подряд помеченных числа – локальный минимум и предшествующее или последующее за ним число.

Покажем, что и в этом случае при выполнении некоторых условий можно ограничиться рассмотрением только нечетной и четной пометок, т. е. хотя помечать подряд пары соседних чисел в окрестности локального минимума можно, но делать это нецелесообразно.

*Утверждение.* При выполнении условий

$$F_{m_i-2} < F_{m_i-1} < F_{m_i} \quad (i = 1: r) \quad (5)$$

оптимальной является нечетная или четная пометка (в зависимости от того, *какая из двух сумм  $F_{n-1}$  и  $F_n$  не больше другой*).

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что из неравенств (5) с учетом неравенств (4) имеем возрастающую последовательность частичных сумм  $F_1 < F_2 < \dots < F_{M_{r+1}}$ , где  $M_{r+1}$  есть номер локального максимума на последнем участке  $\alpha_{m_r}, \alpha_{m_r+1}, \dots, \alpha_n$ .

Доказательство утверждения проведем по индукции по числу участков в последовательности (3).

1. Утверждение справедливо для одного первого участка  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_1-1}$ , как было показано выше.

2. Индуктивное допущение: утверждение справедливо для  $s$  первых участков  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_s-1}$ .

3. Индуктивный переход: покажем справедливость утверждения для  $s+1$  первых участков  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_{s+1}-1}$ , т. е. что при переходе через очередной локальный минимум  $\alpha_{m_s}$  смены четности при накоплении сумм чисел на нечетных и четных местах не происходит и, следовательно, можно продолжить накопление имеющихся сумм чисел на нечетных и четных местах.

Доказательство проведем от противного, т. е. предположим, что при оптимальной пометке в последовательности (3) помечается локальный минимум  $\alpha_{m_s}$  и один из его соседей.

а) Пусть оказались помеченными числа  $\alpha_{m_s}$  и  $\alpha_{m_s-1}$ . Имея оптимальную пометку во всей последовательности (3), будем иметь пометку и в ее начальной части  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_s-1}$ .

Эта пометка состоит из чисел, образующих сумму  $F_{m_s-1}$ . Согласно необходимому условию оптимальности пометки – свойству 4 эта пометка является оптимальной в рассматриваемой начальной части  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_s-1}$ , т. е. она не хуже другой из двух пометок (противоположной четности), определяемой слагаемыми из суммы  $F_{m_s-2}$ . Итак, получили неравенство  $F_{m_s-1} \leq F_{m_s-2}$ , которое противоречит условию утверждения.



б) Пусть оказались помеченными числа  $\alpha_{m_s}$  и  $\alpha_{m_s+1}$ . Имея оптимальную пометку во всей последовательности (3), будем иметь пометку и в ее начальной части  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_s}$ . Эта пометка состоит из чисел, образующих сумму  $F_{m_s}$ . Согласно необходимому условию оптимальности пометки – свойству 4 эта пометка является оптимальной в рассматриваемой начальной части  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_s}$ , т. е. она не хуже другой из двух пометок (противоположной четности), определяемой слагаемыми из суммы  $F_{m_s-1}$ . Итак, получили неравенство  $F_{m_s} \leq F_{m_s-1}$ , которое противоречит условию утверждения. Следовательно, утверждение доказано.

Доказанные свойства позволяют предложить следующий алгоритм построения оптимальной пометки чисел в последовательности (3) (обозначим последнюю через  $\Pi$ ).

1. Пусть последовательность  $\Pi$  такова, что вся она или ее головная часть является невозрастающей последовательностью. Определим число  $\nu$  соответственно этим двум случаям, а именно: в первом случае полагаем  $\nu = n$ , а во втором случае  $\nu = m_1$ . Пусть для числа  $\nu$  ближайшим к нему меньшим четным числом является число  $p$ , т. е.  $p = 2 \lfloor \nu/2 \rfloor$ . Тогда помечаем следующие числа, стоящие на четных местах:  $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_p$ . При этом в первом случае, т. е. при  $\nu = n$ , задача решена полностью, а во втором случае, т. е. при  $\nu = m_1$ , исключаем из дальнейшего рассмотрения головную часть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  и оставшуюся часть  $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_n$  обозначаем  $\Pi_1$  ( $\Pi_1 \neq \Lambda$ ).

2. Пусть последовательность  $\Pi_1$  такова, что вся она (или ее хвостовая часть) является неубывающей последовательностью. Определим число  $w$  соответственно этим двум случаям, а именно: в первом случае полагаем  $w = p + 1$ , а во втором случае  $w = m_r$ . Пусть для числа  $w$  ближайшим к нему большим числом той же четности, что и число  $n - 1$ , является число  $q$ , т. е.  $q = w + 2 \lfloor (n - 1 - w) / 2 \rfloor$ . Тогда помечаем следующие числа:  $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-3}, \dots, \alpha_{q+2}, \alpha_q$ . При этом в случае  $w = p + 1$  задача решена полностью, а в случае  $w = m_r$  исключаем из

дальнейшего рассмотрения хвостовую часть  $\alpha_q, \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  и оставшуюся часть последовательности чисел обозначаем через  $\Pi_2$  ( $\Pi_2 \neq \Lambda$ ).

3. Пусть последовательность  $\Pi_2$  состоит из чисел  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ . Будем составлять две суммы чисел этой последовательности нарастающим итогом каждую – суммы чисел, стоящих на нечетных местах, и суммы чисел, стоящих на четных местах:

$$F_k = \beta_k + \beta_{k-2} + \beta_{k-4} + \dots + \beta_{2(1 - \{k/2\})} = \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} \beta_{k-2i} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Номер последнего слагаемого в этой формуле, имеющий вид  $2(1 - \{k/2\})$  в левой ее части, представлен в правой ее части в виде  $k - 2i$  при  $i = \lfloor k/2 \rfloor - 1$ , что возможно ввиду выполнения равенства  $k/2 + \{k/2\} = \lfloor k/2 \rfloor$ .

Возможны два случая.

Случай 1. Существует такое натуральное число  $t$ , что

$$F_1 < F_2 < \dots < F_{t-1} \geq F_t, \quad (6)$$

т. е. при включении очередного числа  $\beta_i$  в соответствующую сумму эта сумма оказывается больше другой из двух сумм, накопленных к данному моменту, и это выполняется до числа  $\beta_t$ .

Пусть для  $t$  ближайшим к нему справа в последовательности  $\Pi_2$  локальным минимумом является  $u$ -й локальный минимум, т. е. с номером  $m_u$ , этой последовательности, причем при  $u = r$  этот локальный минимум является односторонним. Тогда помечаем числа

$$\beta_{2(1 - \{t/2\})}, \beta_{2(2 - \{t/2\})}, \dots, \beta_{t-2}, \beta_t, \beta_{t+2}, \dots, \beta_{m_u - 2\lfloor (m_u - t)/2 \rfloor}.$$

При этом при  $u = r$  задача решена полностью, в противном случае исключаем из дальнейшего рассмотрения головную часть  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_u - 2\lfloor (m_u - t)/2 \rfloor}$  последовательности  $\Pi_2$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае помечаются числа, вошедшие в сумму  $F_t$ , а также последующие за  $\beta_t$  числа, стоящие после  $\beta_t$  через одно число, но не далее числа  $\beta_{m_u}$ .

Случай 2. Числа  $t$ , указанного в случае 1, не существует.

Тогда имеем  $F_1 < F_2 < \dots < F_{t-1} < F_t$ . Так как сумма  $F_{t-1}$  меньше суммы  $F_t$ , то помечаем числа, вошедшие в сумму  $F_{t-1}$ .

Таким образом, на шаге 3 алгоритма удаётся либо отбросить головной участок последовательности  $\Pi_2$  до некоторого локального минимума этой последовательности (случай 1), либо продолжить накопления сумм за очередной локальный минимум последовательности  $\Pi_2$ .

4. Если после отбрасывания головной части последовательности  $\Pi_2$ , произведенного на шаге 3 (случай 1), оставшаяся последовательность чисел  $\Pi_3$  не пуста, то проделываем для нее те же действия, что и для последовательности  $\Pi_2$  на шаге 3, и т. д.

**Пример.** Пусть требуется осуществить оптимальную пометку в следующей последовательности чисел:

8, 6, 5, 4, 2, 5, 7, 6, 3, 2, 3, 7, 8, 10, 6, 5,  
4, 3, 1, 2, 3, 4, 9, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 4, 6.

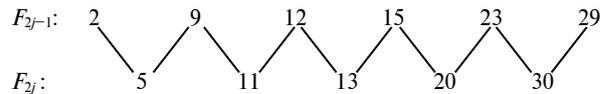
Для решения применим вышеизложенный алгоритм.

1) Так как начальный участок 8, 6, 5, 4, 2 есть убывающая последовательность, то помечаем (обводим кружком) на нем числа, стоящие на четных местах, приближаясь, насколько возможно, к первому локальному минимуму исходной последовательности (числу 2), и отбрасываем следующий головной участок вплоть до последнего помеченного числа 8, ⑥, 5, ④. Так как сам локальный минимум (число 2) оказался не помеченным, то он относится к оставшейся части последовательности.

2) Так как конечный участок 1, 3, 4, 6 оставшейся (или исходной) последовательности есть возрастающая последовательность, то помечаем на нем числа через одно, начиная от предпоследнего числа и двигаясь справа налево и приближаясь, насколько возможно, к последнему локальному минимуму исходной последовательности (числу 1), и отбрасываем следующий хвостовой участок вплоть до числа, помеченного в последнюю очередь ①, 3, ④, 6.

3) Для оставшейся последовательности  
2, 5, 7, 6, 3, 2, 3, 7, 8, 10, 6, 5, 4, 3, 1, 2,  
3, 4, 9, 5, 4, 3, 2

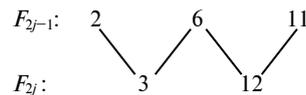
составляем суммы чисел нарастающим итогом каждую — суммы чисел, стоящих на нечетных местах,  $F_{2j-1}$  и суммы чисел, стоящих на четных местах,  $F_{2j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) до тех пор, пока в паре последовательных сумм  $F_{t-1}$  и  $F_t$  прекращается их рост, т. е. пока не встретится  $F_{t-1} \geq F_t$ :



Так как получилось  $F_{11} = 29 < 30 = F_{10}$ , то накопление обеих сумм прекращаем, помечаем числа, вошедшие в сумму  $F_{11}$ , следовательно, стоящие на нечетных местах вплоть до числа  $\beta_{11} = 6$ , продолжаем пометку чисел, стоящих на следующих нечетных местах вплоть до ближайшего локального минимума  $\beta_{15} = 1$ . Далее отбрасываем следующий головной участок чисел вплоть до последнего помеченного числа:

②, 5, ⑦, 6, ③, 2, ③, 7, ⑧, 10, ⑥, 5, ④, 3, ①.

4) Для оставшейся последовательности 2, 3, 4, 9, 5, 4, 3, 2 проделываем аналогичные п. 3 действия:



Отсюда получаем следующую пометку чисел в имеющейся последовательности ②, 3, ④, 9, ⑤, 4, ③, 2.

Итак, получили следующую оптимальную пометку чисел во всей последовательности:

8, ⑥, 5, ④, ②, 5, ⑦, 6, ③, 2, ③, 7, ⑧, 10, ⑥, 5, ④,  
3, ①, ②, 3, ④, 9, ⑤, 4, ③, 2, ①, 3, ④, 6.

Оптимальное значение целевой функции (сумма помеченных чисел) равно 63. Пример решен.

Дадим теперь обоснование приведенного выше алгоритма построения оптимальной пометки.

Для обоснования первого шага алгоритма решаем задачу о пометке чисел в головной части  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  исходной последовательности. Так как внутри нее нет локального минимума, то согласно определению допустимой пометки имеем здесь только две допустимые пометки – нечетную и четную. Таким образом, пометить достаточно те числа, которые образуют не бóльшую из двух сумм  $\sum_{i=1}^{p/2} \alpha_{2i-1}$  и  $\sum_{i=1}^{p/2} \alpha_{2i}$ , а именно: так как имеем  $\alpha_{2i-1} \geq \alpha_{2i}$ , то вторую из этих двух сумм, т. е. достаточно брать четную пометку. Так как число  $\alpha_p$ , стоящее на четном месте, оказывается помеченным, то с учетом того, что это число является последним в последовательности  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , применяя свойство 5, получаем: эту последовательность можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Второй шаг алгоритма обоснован в силу обоснованности первого шага алгоритма и свойства симметрии решения – свойства 3.

Для обоснования случая 1 шага 3 алгоритма решаем задачу о пометке чисел в последовательности  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_u-2\{(m_u-t)/2\}}$ . Справедливость неравенств (6) позволяет воспользоваться доказанным выше утверждением, и тогда получаем, что для нахождения оптимальной пометки достаточно ограничиться рассмотрением только нечетной и четной пометок. В частности, при решении задачи о пометке чисел в последовательности  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  достаточно ограничиться рассмотрением только нечетной и четной пометок. Последнее неравенство в системе неравенств (6) показывает, что в этой задаче последнее число  $\beta_r$  оказывается помеченным. Следовательно, помеченными окажутся и числа  $\beta_{r+2}, \beta_{r+4}, \dots, \beta_{m_u-2\{(m_u-t)/2\}}$ . Тогда, применяя свойство 5, последовательность

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_u-2\{(m_u-t)/2\}}$  можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Обоснованность случая 2 шага 3 алгоритма вытекает из доказанного выше утверждения.

*Замечание.* Вместо изложенного выше алгоритма последовательного отбрасывания головных частей последовательности чисел можно построить аналогичный алгоритм отбрасывания хвостовых частей последовательности чисел. Это вытекает из свойства симметрии, отмеченного выше для оптимального решения задачи. Очевидно также, что можно скомбинировать эти два алгоритма, применяя поочередное отбрасывание то головной, то хвостовой частей последовательности, т. е. двигаясь от концов к середине исходной последовательности чисел.

**Решение основной задачи.** Решение основной задачи  $\max [D(S), \Pi(S)] \rightarrow \min$  можно осуществлять с помощью решения серии задач вида  $P(C) \rightarrow \min$ , т. е. задач о пометке чисел. Задача решается методом последовательного улучшения плана. В соответствующем алгоритме при переходе от одного сочетания станков к другому значения функции  $D(S)$  возрастают, а функции  $\Pi(S)$  – убывают, т. е. эти значения постепенно сближаются, выравниваются и в итоге функция  $\max [D(S), \Pi(S)]$  принимает минимальное значение. Подробное изложение этого алгоритма и его обоснование приведены в [15, с. 217–221] и поэтому здесь они опускаются. Проиллюстрируем лишь итог применения этого алгоритма для конкретных численных данных.

**Пример.** Пусть на линии выполняется  $n = 12$  операций. Время перехода робота от каждого станка к следующему  $d_i, i = 1 : 11$ , и штучные трудоемкости операций  $a_i, i = 1 : 12$ , указаны в таблице.

|       |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $i$   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
| $d_i$ | 3   | 1   | 4   | 7   | 6   | 1   | 2   | 9   | 8   | 1   | 5   | –   |
| $a_i$ | 133 | 125 | 134 | 130 | 125 | 135 | 131 | 132 | 120 | 135 | 121 | 137 |

Исходные данные взяты из [14, с. 189–190] для демонстрации преимущества рассмотренного здесь маршрута с петлями, по сравнению с прямолинейным маршрутом движения робота, рассмотренном в [14]. Предполагая, что от всех внутренних станков ( $i = 1 : 11$ ) делаются петли, требуется построить оптимальную схему обслуживания всех станков.

Используя упомянутый выше алгоритм, получаем искомое оптимальное сочетание станков  $S^* = (2, 5, 6, 9, 10)$ , т. е. тех станков, от которых петли должны быть сделаны вниз. Следовательно, от остальных станков  $\bar{S}^* = (3, 4, 7, 8, 11)$  петли должны быть сделаны вверх. При этом оптимальное значение ЦФ :  $\pi^* = 140$ , которое значительно лучше (меньше) оптимального значения ( $\pi^* = 178$ ) при прямолинейном маршруте движения робота, т. е. производственный цикл удалось сократить более чем на 27 %. Результат решения примера представлен в графическом виде на рис. 2. На нем в соответствии с вышеизложенным петля для пары смежных станков, используемая для обслуживания только одного из них, делается на пути дви-

жения робота «туда», а обоих станков – на пути «обратно».

Итак, разработана экономико-математическая модель построения КГ работы РЛ, отличающаяся рассмотрением петель в маршруте движения ПР, в отличие от традиционно рассматриваемых прямолинейных маршрутов его движения.

Для решения соответствующей основной экстремальной задачи разработана и решена вспомогательная задача, названная нами задачей о пометке чисел. Ее решение проиллюстрировано на численных данных. Эта вспомогательная задача является пока узкоспециализированной, обслуживающей только указанную ситуацию, и поэтому в дальнейшем желательно расширить область ее применения.

Результат решения указанной основной задачи показан на конкретных численных данных и приведен в виде оптимального календарного графика работы роботизированной линии.

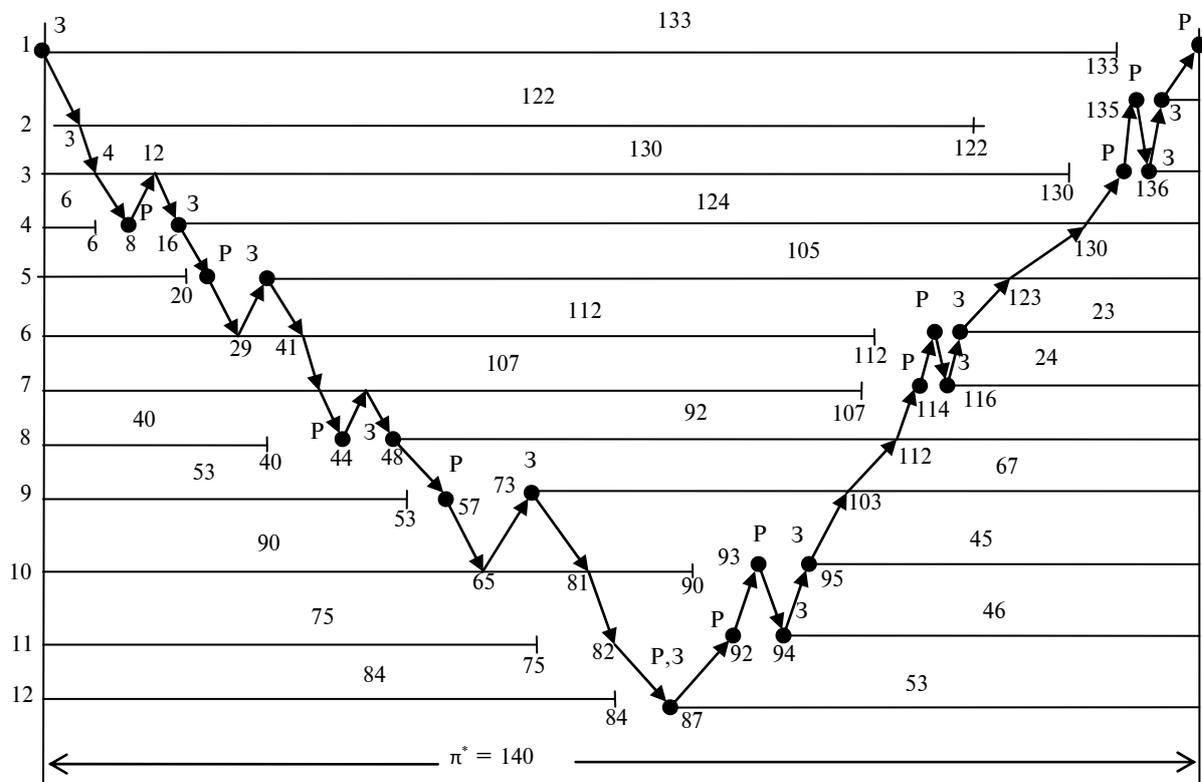


Рис. 2. Минимальный цикл линии при наличии петель в маршруте робота

Точки Р и З – моменты соответственно разгрузки и загрузки станка, стрелки – движение робота

**Выводы.** Хотя наличие петель в маршрутах увеличивает время движения робота по сравнению с прямолинейным маршрутом его движения, рассмотрение таких маршрутов целесообразно, ибо это способствует во многих случаях сокращению цикла работы роботизированной линии. Это подтверждает рассмотренный в статье пример, в котором цикл сократился на 27 %.

Так как расширение множества рассматриваемых маршрутов очевидно способствует уменьшению цикла, то целесообразно рассмотреть сочетание обоих указанных видов маршрутов, тем более, что вид целевой функции для этого более общего случая уже найден ([15], с. 209–214). При этом можно рассмотреть петли не только к соседним, но и более отдаленным станкам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Климов А.С., Машнин Н.Е.** Роботизированные технологические комплексы и автоматические линии в сварке: учеб. пособие. 2-е изд. СПб.: Лань, 2011. 240 с.
2. **Хватов Б.Н.** Гибкие производственные системы. Расчет и проектирование: учеб. пособие. Тамбов: ТГТУ, 2007. 112 с.
3. Интеллектуальные роботы: учеб. пособие для вузов / под ред. Е.И. Юревича. М.: Машиностроение, 2007. 360 с.
4. **Климов А.С., Бойченко О.В., Схиртладзе А.Г.** Современные роботы в машиностроении: учеб. пособие. Тольятти: ТГУ, 2005. 132 с.
5. **Костюк Г.И., Баранов О.О., Левченко И.Г., Фадеев В.А.** Роботизированные технологические комплексы: учеб. пособие. Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 2003. 214 с.
6. **Костюк Г.И., Левченко И.Г.** Промышленные роботы: учеб. пособие. Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 2003. 105 с.
7. **Корендясев А.И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И.** Теоретические основы робототехники : в 2 кн. / отв. ред. С.М. Каплунов. М.: Наука, 2006. 402 с.
8. **Юревич Е.И.** Основы робототехники. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 416 с.
9. **Макаров И.М., Топчеев Ю.И.** Робототехника: История и перспективы. М.: Наука; Изд-во МАИ, 2003. 349 с.
10. **Бернадский В.Н.** Промышленные роботы в современном производстве. Автоматическая сварка. 2001. № 11. С. 37–42.
11. **Сидоров С.Г.** Некоторые задачи моделирования гибких роботизированных систем. Современная техника и технология. 2013. № 10. URL: <http://technology.ru/2013/10/2375>
12. **Козловский В.А., Козловская Э.А., Макаров В.М.** Эффективность переналаживаемых роботизированных производств. Л.: Машиностроение, 1985. 224 с.
13. Промышленная робототехника и гибкие автоматизированные производства / под ред. Е.И. Юревича. Л.: Лениздат, 1984. 223 с.
14. **Тютюкин В.К.** Оптимальный календарный график для роботизированной линии // Применение математики в экономике / под ред. А.В. Воронцовского. СПб., 2006. Вып. 16. С. 157–193.
15. **Тютюкин В.К.** Оптимальное расписание для однопредметной линии при маршруте с петлями для робота // Применение математики в экономике / под ред. А.В. Воронцовского. СПб., 2009. Вып. 17. С. 197–224.

## REFERENCES

1. **Klimov A.S., Mashnin N.E.** Robotizirovannye tekhnologicheskie komplekxy i avtomaticheskie linii v svarke: ucheb. posobie. 2-e izd. SPb.: Lan', 2011. 240 s. (rus)
2. **Khvatov B.N.** Gibkie proizvodstvennyye sistemy. Raschet i proektirovanie: ucheb. posobie. Tambov: TGTU, 2007. 112 s. (rus)
3. Intellektual'nye roboty: ucheb. posobie dlia vuzov. Pod red. E.I. Iurevicha. M.: Mashinostroenie, 2007. 360 s. (rus)
4. **Klimov A.S., Boichenko O.V., Skhirtladze A.G.** Sovremennyye roboty v mashinostroenii: ucheb. posobie. Tol'iatti: TGU, 2005. 132 s. (rus)
5. **Kostiuk G.I., Baranov O.O., Levchenko I.G., Fadeev V.A.** Robotizirovannyye tekhnologicheskie komplekxy: ucheb. posobie. Khar'kov: Khar'k. aviats. in-t, 2003. 214 s. (rus)
6. **Kostiuk G.I., Levchenko I.G.** Promyshlennyye roboty: ucheb. posobie. Khar'kov: Khar'k. aviats. in-t, 2003. 105 s. (rus)
7. **Korendiasev A.I., Salamandra B.L., Tyves L.I.** Teoreticheskie osnovy robototekhniki : v 2 kn. Otv. red. S.M. Kaplunov. M.: Nauka, 2006. 402 s. (rus)
8. **Iurevich E.I.** Osnovy robototekhniki. 2-e izd. SPb.: BKhV-Peterburg, 2005. 416 s. (rus)
9. **Makarov I.M., Topcheev Iu.I.** Robototekhnika: Istoriia i perspektivy. M.: Nauka; Izd-vo MAI, 2003. 349 s. (rus)

10. **Bernadskii V.N.** Promyshlennye roboty v sovremennom proizvodstve. Avtomaticheskaja svarka. 2001. № 11. S. 37–42. (rus)

11. **Sidorov S.G.** Nekotorye zadachi modelirovaniia gibkikh robotizirovannykh sistem. Sovremennaiia tekhnika i tekhnologiiia. 2013. № 10. URL: <http://technology.ru/2013/10/2375> (rus)

12. **Kozlovskii V.A., Kozlovskaiia E.A., Makarov V.M.** Effektivnost' perenalazhivaemykh robotizirovannykh proizvodstv. L.: Mashinostroenie, 1985. 224 s. (rus)

13. Promyshlennaia robototekhnika i gibkie

avtomatizirovannye proizvodstva. Pod red. E.I. Iurevicha. L.: Lenizdat, 1984. 223 s. (rus)

14. **Tiutiukin V.K.** Optimal'nyi kalendarnyi grafik dlia robotizirovannoi linii. *Primenenie matematiki v ekonomike*. Pod red. A.V. Vorontsovskogo. SPb., 2006. Vyp. 16. S. 157–193. (rus)

15. **Tiutiukin V.K.** Optimal'nyi raspisanie dlia odnopredmetnoi linii pri marshrute s petliami dlia robota. *Primenenie matematiki v ekonomike*. Pod red. A.V. Vorontsovskogo. SPb., 2009. Vyp. 17. S. 197–224. (rus)

---

**ТЮТЮКИН Виктор Константинович** – профессор Санкт-Петербургского государственного университета, доктор экономических наук.

195251, Политехническая ул., д. 29, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: vktutukin@mail.ru

**TUTUKIN Viktor K.** – addressworken, Saint-Petersburg State University.

195251. Politechnicheskaya str. 29. St. Petersburg. Russia. E-mail: VKTutukin@mail.ru

---