УДК 330.45

Е.В. Майоров, Т.А. Алексеева

АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ СРЕДСТВАМИ СИСТЕМЫ MATLAB

E.V. Mayorov, T.A. Alexeeva

ANALYSIS OF NONLINEAR DYNAMICS MODELS OF ECONOMIC PROCESSES BY MATLAB SYSTEM

Рассматриваются примеры нелинейных моделей экономической динамики и возможности их исследования посредством численных процедур в системе MATLAB. Продемонстрированы особые эффекты этих моделей, в частности возможности формирования хаотического поведения.
MATLAB В ЭКОНОМИКЕ; НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА; ТЕОРИЯ ХАОСА В ЭКОНОМИКЕ; БИФУРКАЦИЯ В ЭКОНОМИКЕ; СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.

This article discusses examples of nonlinear models of economic dynamics and possibilities of their research by numerical procedures in MATLAB. Demonstrated specific effects of these models, in particular, the possibility of forming a chaotic behavior.
MATLAB IN ECONOMICS; DYNAMICS IN ECONOMICS; CHAOS THEORY IN ECONOMICS; BIFURCATION IN ECONOMICS; SINERGETIC MODELS.

Моделирование экономических процессов сопряжено, как правило, с трудностями выбора спецификации модели. Очевидно, что важную роль при этом играет фактор времени, требующий использования динамических моделей. Однако несмотря на решение в пользу динамики, часто предпочтение отдается линейным моделям, в которых предполагается эффект наложения (суперпозиции) отдельных элементов исследуемой системы. Такой подход сужает возможности получения интересных и нестандартных эффектов в поведении экономических систем, тем самым препятствуя развитию новых методов их исследования. В частности, некоторые модели могут демонстрировать переходные процессы в виде беспорядочной динамики с критичной зависимостью от начальных условий.

Далее рассмотрим вопросы анализа моделей с бифуркационной диаграммой и аттрактором лоренцовского типа средствами системы MATLAB, а также обоснуем важность использования нелинейных динамических моделей в исследовании экономических процессов.

Представим ряд динамических моделей, вызывающих интерес как с точки зрения содержания экономических явлений, которые они описывают, так и особенностей эффектов решений, которые они демонстрируют.

Динамические модели

Нелинейная разностная модель Курно. Олигополии Курно – модель, экономически отражающая рыночную конкуренцию. Предполагается, что число продавцов на рынке невелико и фиксировано, т. е. существуют барьеры для входа на рынок. Все продавцы производят одинаковое благо и поставляют его на рынок в количестве, максимизирующем их прибыль, полагая, что количество товара, которое поставляет конкурент, – фиксированная константа. Прибыль фирмы определяется как разность произведения цены на поставляемое фирмой количество блага и издержек этой фирмы. Спрос, в свою очередь, зависит от суммарного количества блага на рынке, выпущенного всеми фирмами.

$$\pi_i = p(Q)q_i - c_i q_i,$$

где q_i – количество товара.

В приведенной ниже модели рассматривается дуополия, т. е. тогда на рынке участвуют два продавца. Спрос на блага зададим нелинейной функцией, обратно пропорциональной цене:

$$p(t) = \frac{1}{q_1 + q_2};$$
$$TC_i(t) = c_i q_i(t);$$
$$TR_i(t) = p(t) q_i(t);$$
$$\pi_i = TR_i(t) - TC_i(t).$$

Тогда, максимизируя свою прибыль, фирмы будут поставлять на рынок соответственно следующее количество:

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\dfrac{q_2}{c_1}} - q_2; \\ q_2 = \sqrt{\dfrac{q_1}{c_2}} - q_1. \end{cases}$$

В дальнейшем модель можно представить дискретно следующим образом:

$$(q_1)_{t+1} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(q_2)_t}{c_1}} - (q_2)_t; \ (q_2)_t \le \dfrac{1}{c_1}; \\ (q_1)_t + \varepsilon; \end{cases}$$

$$(q_2)_{t+1} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(q_1)_t}{c_2}} - (q_1)_t; \ (q_1)_t \le \dfrac{1}{c_2}; \\ (q_2)_t + \varepsilon. \end{cases}$$

Затем вычисляются равновесные значения для начального момента времени:

$$\begin{cases} (q_1)_0 = \dfrac{c_2}{(c_1 + c_2)^2}; \\ (q_2)_0 = \dfrac{c_1}{(c_1 + c_2)^2}. \end{cases}$$

Видим, что модель симметрична и равновесные значения количества поставляемого товара зависят только от параметров издержек. В дальнейшем можно предположить, что при варьировании параметров c_1 и c_2 будут изменяться равновесные значения, причем эти изменения будут также влиять на значения в разные моменты времени. Для того чтобы проверить данное утверждение, можно графически представить изменения стационарных состояний в зависимости от возмущения параметров.

Для удобства можно воспользоваться только параметром c_1 и переменной q_1. Это не умаляет общности полученных результатов в силу симметричности модели.

Запишем процедуру в системе MATLAB, позволяющую строить бифуркацонные диаграммы для дискретных систем. С ее помощью можно не только получать необходимое графическое представление – бифуркационную диаграмму, но и за счет возможности варьирования параметров уточнять решение.

```
Npre = 3000;  Nplot = 700;
x = zeros(Nplot,1);
y = zeros(Nplot,1);
for a = 0,5:0,0005:6,25,
  x(1) = 0,5;
  y(1) = 0,1;
  for n = 1 : Npre,
    x(1) = (y(1)/a)^(1/2) − y(1);
    y(1) = (x(1))^(1/2) − x(1);
  end,
  for n = 1 : Nplot − 1,
    x(n + 1) = (y(n)/a)^(1/2) − y(n);
    y(n + 1) = (x(n))^(1/2) − x(n);
  end,
  plot(a*ones(Nplot,1), x, '.', 'markersize', 2);
  hold on;
end,
title('Бифуркационная диаграмма');
xlabel('a');  ylabel('x_t');
set(gca, 'xlim', [5.75 6.25]).
```

Реализация данной процедуры отражена на следующем графике (рис. 1).

По оси OY расположены равновесные значения для первой фирмы, а по оси OX – изменение величины издержек первой фирмы. Видим, что существуют бифуркационные значения, после которых система меняет свое поведение, а после некоторого момента появляется детерминированный хаос.

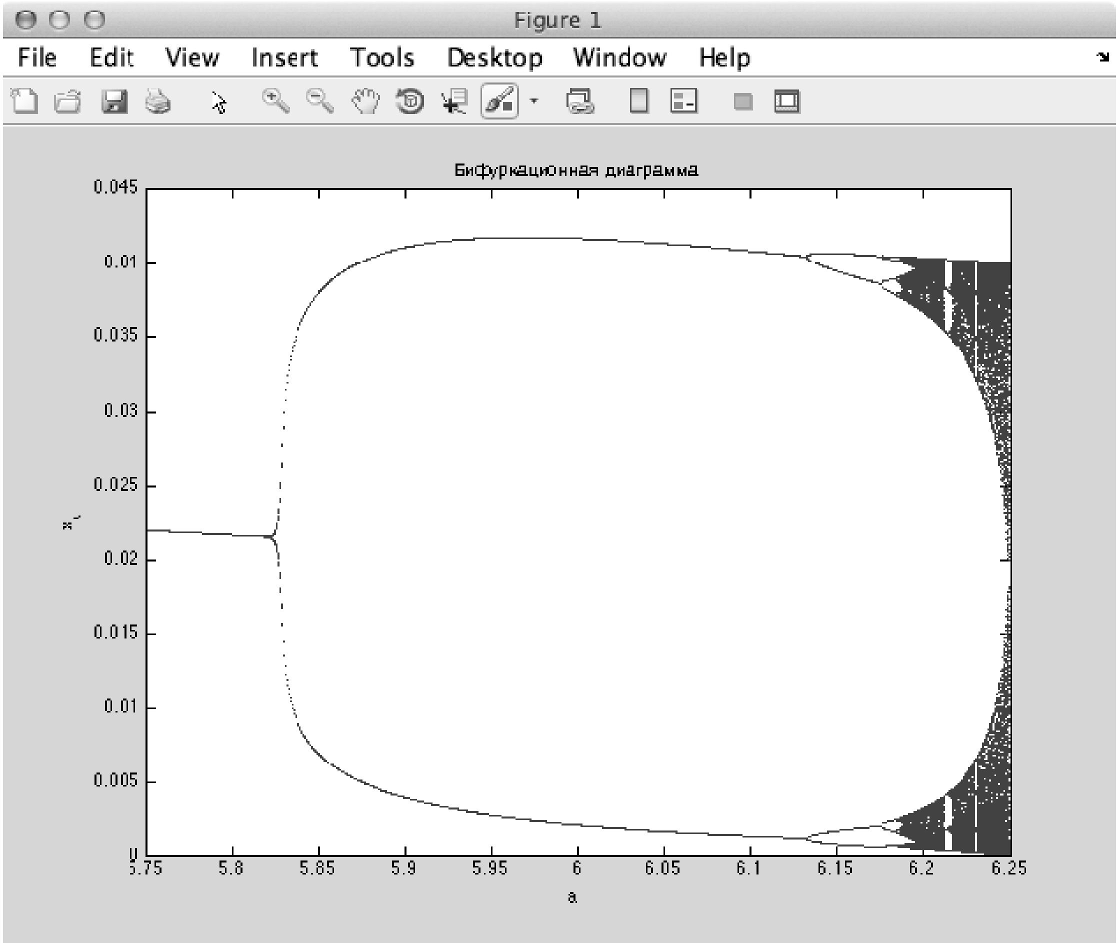

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

Исследование синергетической модели устойчивости средней фирмы. Синергетика предполагает переход системы от одного устойчивого состояния к другому через неустойчивое, который происходит в результате изменения интервала значений управляющих параметров – постоянных величин, входящих в эволюционное уравнение и задающихся экзогенно.

Объектом данной модели является фирма, обладающая следующими показателями: число сотрудников, величина капитала и кредита – соответственно y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_2y_3 - by_1; \\ \dot{y}_2 = c(y_2 + y_3) - dy_1y_3; \\ \dot{y}_3 = ey_2 - fy_3. \end{cases}$$

Данная система эволюционных уравнений имеет следующую экономическую интерпретацию:

1) прирост числа сотрудников фирмы с течением времени пропорционален ее капиталу и взятому кредиту, от этого прироста следует отнять ту его часть, которая не приросла из-за увольнения сотрудников;

2) прирост капитала фирмы с течением времени пропорционален доходу, полученному от вложения суммы капитала и кредита, минус расходная часть, связанная с оплатой труда сотрудников и оплатой кредита;

3) прирост суммы кредита с течением времени, если фирма берет больше кредитов под новые проекты, пропорционален размеру капитала фирмы, минус потери, обусловленные величиной взятого кредита. Если у фирмы уже много кредитов, то с получением нового могут возникнуть проблемы, кроме того, необходимо выплачивать большой процент по взятым кредитам.

Параметры a, b, c, d, e, f представляют собой некоторые факторы, влияющие на соответствующие пропорции. При определенном значении этих параметров могут формироваться различные аттракторы, например предельный цикл. В частности, возможно возникновение странного аттрактора Лоренца. Появление такого аттрактора может негативно сказаться на состоянии фирмы, и она как экономический агент может перестать существовать. Для того чтобы этого избежать, следует попытаться воздействовать на управляющие параметры. Например, можно изменить в динамике параметр f. Он отвечает за факторы, которые обусловливают негативное восприятие фирмы из-за размера кредита. В частности, варьирование вниз этого параметра характеризует ситуацию уменьшения количества новых кредитов.

Для реализации данной системы запишем М-файл в системе MATLAB^

```
function dy = SMUSF(t,y)
global a b c d e f
dy = zeros(3,1);    % a column vector
dy(1) = ay(2)y(3) − by(1);
dy(2) = c(y(2) + y(3)) − dy(1)y(3);
dy(3) = ey(2) − fy(3);
end
```

Представим графически полученное решение, для чего выполним следующие команды:

```
global a b c d e f;
a = 5;
b = 1;
c = 2,1;
d = 8;
e = 1;
f = 4,1;
opt = odeset('OutputSel',[1 2 3], 'OutputFcn','odephas3');
[t,rp] = ode45('SMUSF',[0 150],[1,590898180433897 2,455829283916365 0,480973922490166],opt).
```

В результате получим графическое представление аттрактора лоренцовского типа (рис. 2).

В заключение следует отметить, что представленные модели и решения чаще встречаются в других науках — физике, химии, технике. Отличительной особенностью использования их в экономических приложениях является допущение детерминированности рассматриваемого процесса в длительной перспективе и формирование хаотической динамики. Это достаточно сложно реализуется в экономических явлениях, где с течением времени процесс переходит в стохастический.

Многообразие связей и мультиколлинеарность в реальной экономической системе не позволяют однозначно говорить о наиболее значимых факторах и исключать малозначимые. В силу сложных стохастических зависимостей, характерных для реальных экономических процессов, возникает проблема придания этим закономерностям точной количественной и качественной интерпретации.

Другая проблема — использование непрерывных величин в экономических моделях. В реальности экономике часто свойственны дискретные процессы. В свою очередь, дискретные системы обладают свойствами, сильно отличающимися от непрерывных систем, что демонстрирует модель дуополистической конкуренции Курно. Многие процессы неустойчивы. Проявляются эффекты бифуркации, потеря устойчивости при изменении параметров и другие «неблагоприятные» эффекты. Выявление этих особенностей является актуальной задачей. Важная роль при исследовании подобных процессов в экономике отводится инструментальным средствам. Применение системы MATLAB — эффективный способ не только получить решение динамической системы, но и обнаружить и протестировать при различных значениях параметров особые эффекты, возникающие в моделях нелинейной динамики. Это, в свою очередь, способствует повышению качества исследований.

Несмотря на то что в настоящее время продолжается дискуссия о достоверности наличия хаотической динамики малой размерности в экономических процессах, демонстрируемые эффекты представляют интерес и способствуют разработке новых методов исследования подобных явлений в экономике.

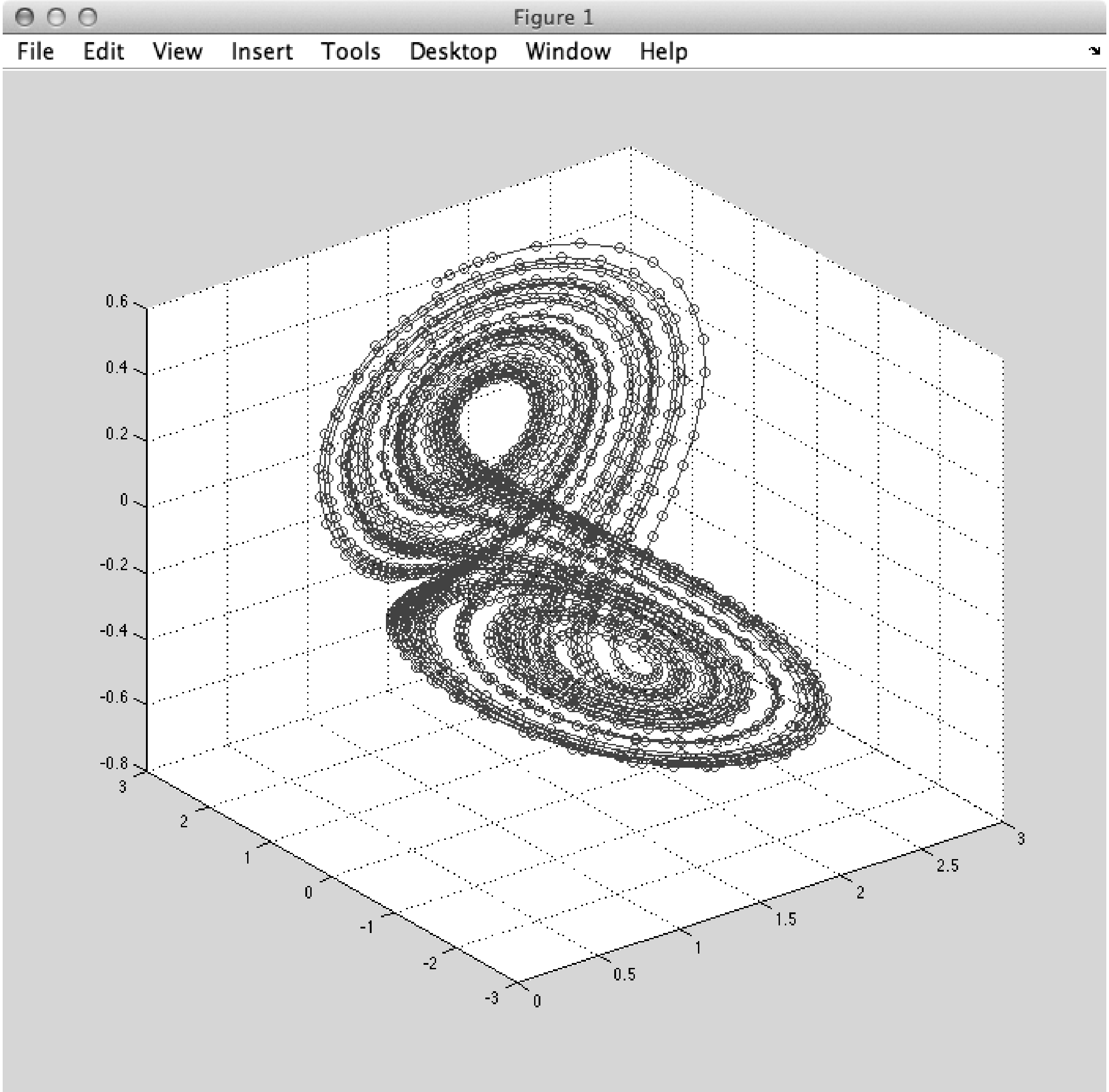

Рис. 2. Аттрактор Лоренца

Нелинейное динамическое моделирование экономических процессов позволяет выявить качественные закономерности и тенденции развития, понять и качественно предсказать возможные переходные ситуации, в некоторых случаях дать количественную оценку экономических показателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jensen R., Urban R.** Chaotic price behavior in a non-linear cobweb model // Economics Letters, 1984, no. 15, pp. 235–240.

2. **Kiel L., Elliott E.** (ets.) Chaos theory in the social sciences: Foundations and applications. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1996.

3. **Matsumoto A., Szidarovszky F.** Delay Differential Nonlinear Economic Models. In G.I. Bischi, C. Chiarella, L. Gardini (eds.) // Nonlinear Dynamics in Economics, Finance and the Social Sciences. Springer-Verlag,

Berlin/Heidelberg/New York, 2010, pp. 195–214.

4. **Shone R.** Economic dynamics phase diagrams and their economic application. Cambridge University Press, 2002.

5. **Красс М.С., Чупрынов Б.П.** Математические методы и модели для магистрантов экономики: учеб. пособие. 2-е изд. СПб.: Питер, 2010.

6. **Мироновский Л.** Моделирование разностных уравнений: учеб. пособие. СПб.: ГУАП, 2004.

7. **Чен К., Джиблин П., Ирвинг А., Кондрашов В.** MATLAB в математических исследованиях / пер. с англ. В.Е. Кондрашова и С.Б. Королева. М.: Мир, 2001.

8. **Kirman A.P., Salmon M.** (eds.). Learning and rationality in economics. B. Blackwell, 1995.

9. **Zhang W.B.** Differential equations, bifurcations, and chaos in economics // World Scientific, 2005, vol. 68.

10. **Lindgren J.I.** Deterministic chaos in government debt dynamics with mechanistic primary balance rules. arXiv preprint: arXiv:1109.0942. September 2011.

REFERENCES

1. **Jensen R., Urban R.** Chaotic price behavior in a non-linear cobweb model. *Economics Letters*, 1984, no. 15, pp. 235–240.

2. **Kiel L., Elliott E.** (ets.) Chaos theory in the social sciences: Foundations and applications. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1996.

3. **Matsumoto A., Szidarovszky F.** Delay Differential Nonlinear Economic Models. In G.I. Bischi, C. Chiarella, L. Gardini (eds.) *Nonlinear Dynamics in Economics, Finance and the Social Sciences.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2010, pp. 195–214.

4. **Shone R.** Economic dynamics phase diagrams and their economic application. Cambridge University Press, 2002.

5. **Krass M.S., Chuprynov B.P.** Matematicheskie metody i modeli dlia magistrantov ekonomiki: ucheb. posobie. 2-e izd. SPb.: Piter, 2010. (rus)

6. **Mironovskii L.** Modelirovanie raznostnykh uravnenii: ucheb. posobie. SPb.: GUAP, 2004. (rus)

7. **Chen K., Dzhiblin P., Irving A., Kondrashov V.** MATLAB v matematicheskikh issledovaniiakh. Per. s angl. V.E. Kondrashova i S.B. Koroleva. M.: Mir, 2001. (rus)

8. **Kirman A.P., Salmon M.** (eds.). Learning and rationality in economics. B. Blackwell, 1995.

9. **Zhang W.B.** Differential equations, bifurcations, and chaos in economics. *World Scientific*, 2005, vol. 68.

10. **Lindgren J.I.** Deterministic chaos in government debt dynamics with mechanistic primary balance rules. arXiv preprint: arXiv:1109.0942. September 2011.

МАЙОРОВ Евгений Валерьевич – студент III курса факультета экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

193171, ул. Седова, д. 55/2, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: evma01@gmail.com

MAYOROV Evgeny V. – National Research University Higher School of Economics.

193171. Sedova str. 55/2. St. Petersburg. Russia. E-mail: evma01@gmail.com

АЛЕКСЕЕВА Татьяна Анатольевна – доцент кафедры «Математика» Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», кандидат физико-математических наук.

193171, ул. Седова, д. 55/2, Санкт-Петербург, Россия; E-mail: tatyanalexeeva@gmail.com

ALEXEEVA Tatyana A. – National Research University Higher School of Economics.

193171. Sedova str. 55/2. St. Petersburg. Russia. E-mail: tatyanalexeeva@gmail.com