УДК 519.86

В.К. Тютюкин

МОНОТОННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

V.K. Tutukin

EFFICIENCY MONOTONIC INDICES OF QUEUEING SYSTEMS

Статья посвящена установлению свойства монотонности некоторых показателей эффективности систем массового обслуживания четырех типов – систем с отказом, упорядоченного пучка линий, систем с ожиданием и замкнутых систем. Это свойство облегчает и ускоряет нахождение оптимального числа линий в этих системах. Доказана монотонность при увеличении количества линий более 15 таких показателей, например уменьшение вероятности занятости или простоя всех линий, длины и времени в очереди, количества вызовов и времени пребывания вызова в системе обслуживания, коэффициентов простоя объекта и линии при переходе от индивидуальной к бригадной форме многостаночного обслуживания и т. п.

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ. ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ. МНОГОСТАНОЧНОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ И БРИГАДНОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ

The article is dedicated to the monotonicity property determination of some efficiency indices for four types queueing systems – refuse system, ordered bundle of lines, waiting lines and closed system. This property makes easier and faster finding of optimal number of lines in these systems. It's proved the monotony by the growing number of lines over 15 of such indices, for example, the diminution probability of occupation or outage for all lines, the queue length and time, the number of calls and stay time in service system, the object downtime ratio and lines while transition from individual to team type multiple-machine supervision etc.

QUEUEING SYSTEMS. EFFICIENCY INDICES. MULTIPLE-MACHINE SUPERVISION. INDIVIDUAL AND TEAM TYPE SUPERVISION

Одна из основных задач теории массового обслуживания – нахождение оптимального числа линий в системе обслуживания (СО). В качестве целевой функции (ЦФ) при этом зачастую выбирается линейная комбинация двух каких-либо показателей эффективности ее функционирования, например суммарные потери СО из-за простоя объектов (например, станков-автоматов) и линий (например, рабочих-наладчиков). Если оба этих показателя – монотонные (один – монотонно-убывающий, другой – монотонно-возрастающий), то их линейная комбинация является выпуклой функцией (от количества линий в СО), что, как известно, облегчает ее оптимизацию, т. е. уменьшает трудоемкость нахождения решения за счет сокращения количества и времени выполнения вычислительных операций. При отсутствии же свойства монотонности рассматриваемая задача может быть решена лишь перебором, если и не полным, то достаточно широкого множества возможных значений количества линий в СО. Таким образом, в ЦФ целесообразно включать такие показатели, для которых предварительно и было доказано указанное полезное их свойство.

Далее мы докажем монотонность некоторых показателей эффективности функционирования для следующих систем обслуживания: с отказом, упорядоченного пучка линий, с ожиданием и замкнутой. Общими для всех рассматриваемых СО являются следующие исходные данные, допущения и правила функционирования. Под состоянием СО подразумевается количество вызовов в ней; p_k – вероятность состояния k в стационарном режиме (k = 0, 1, 2, ...); n – количество линий в СО. Если в момент поступления есть свободная линия, то вызов занимает одну из них и начинается его обслуживание; ν – время обслуживания вызова на линии. Оно предполагается распределенным по показательному закону с параметром β: $P\{\nu > t\} = e^{-\beta t}$.

В трех первых из указанных выше четырех СО входящий поток считается простейшим с параметром λ. Обозначим: $\alpha = \lambda/\beta$ — нагрузка СО. Здесь доказывается монотонность некоторых показателей эффективности функционирования этих трех СО при увеличении количества линий в них (n = 1, 2, 3, ...). Тогда стационарное решение зависит от этого количества — $p_k^{(n)}$ (k = 0, 1, 2, ...; n = 1, 2, 3, ...). В четвертой из указанной выше СО также установлены некоторые свойства монотонности при увеличении количества обслуживаемых объектов.

Вывод формул для используемых здесь показателей можно найти в классической литературе по теории массового обслуживания [1—4], однако их свойство монотонности, которому посвящена и данная статья, исследуется впервые. С результатами исследования можно ознакомиться в [5, 6].

Монотонные показатели систем с отказом

В системах с отказом вызов, заставший все линии занятыми, получает отказ (в обслуживании). Для них докажем, что уменьшаются следующие вероятности при увеличении количества линий в СО (n = 1, 2, 3, ...).

1. Вероятность застать все линии свободными (простаивающими), т. е. вероятность нулевого состояния СО ($p_0^{(n)} = \left[\sum_{r=0}^{n}(\alpha^r / r!)\right]^{-1}$, n = 1, 2, 3, ...), есть монотонно убывающая (↓) числовая последовательность (в СО с ожиданием, как увидим, монотонно возрастающая).

Действительно, эта монотонность равносильна выполнению неравенства $p_0^{(n+1)} < p_0^{(n)}$, т. е., в явном виде, неравенства $\left[\sum_{r=0}^{n+1}\left(\alpha^r / r!\right)\right]^{-1} < \left[\sum_{r=0}^{n}\left(\alpha^r / r!\right)\right]^{-1}$ (n = 1, 2, ...), которое очевидно выполняется. При этом очевидно выполняется и такое свойство рассматриваемой последовательности: $p_0^{(n)} \to e^{-\alpha}$ при $n \to \infty$.

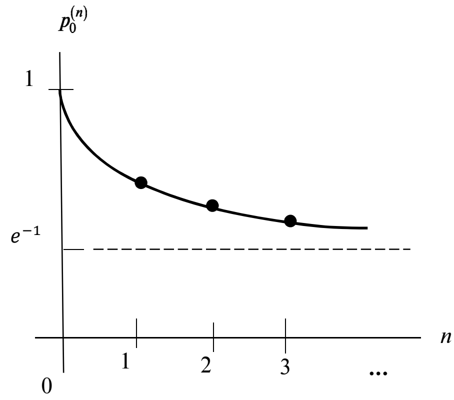

Рис. 1. Монотонное убывание вероятности простоя всех линий в системах с отказом простоя всех линий

Оба эти свойства показаны графически на рис. 1 (члены числовой последовательности для наглядности соединены непрерывной кривой).

2. Вероятность отказа (в обслуживании), а следовательно и потери вызова для СО, занятости всех линий, полной загрузки СО, т. е. числовая последовательность $p_n = (\alpha^n / n!) / \sum_{r=0}^{n}(\alpha^r / r!)$ (n = 1, 2, ...), монотонно убывает.

Действительно, эта монотонность равносильна выполнению неравенства $p_{n+1} / p_n < 1$ (n = 1, 2, ...), а его справедливость вытекает из следующей цепочки равенств и неравенств, в которой S_n означает знаменатель дроби для p_n $\left(S_n = \sum_{r=0}^{n}(\alpha^r / r!)\right)$:

$$p_{n+1} / p_n = \frac{\alpha^{n+1} n! S_n}{(n+1)! S_{n+1} \alpha^n} = \frac{\alpha}{(n+1) S_{n+1}} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{n} \alpha^r / r! = \frac{1}{S_{n+1}} \sum_{r=0}^{n} \alpha^{r+1} / (n+1) r! \le$$

$$\le \frac{1}{S_{n+1}} \sum_{r=0}^{n} \alpha^{r+1} / (r+1)! =$$

$$= \frac{1}{S_{n+1}} \sum_{r=1}^{n+1} \alpha^r / r! < \frac{1}{S_{n+1}} \sum_{r=0}^{n+1} \alpha^r / r! = 1.$$

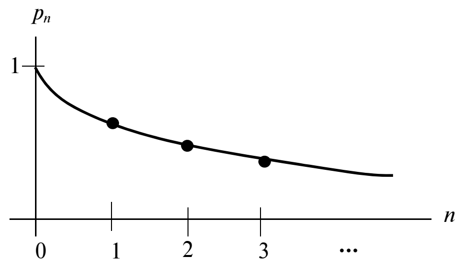

Рис. 2. Монотонное убывание вероятности занятости всех линий в системах с отказом простоя всех линий

Для рассматриваемой последовательности докажем выполнение и такого свойства: $p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n / n!}{\sum\limits_{r=0}^{n} \alpha^r / r!} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n / n!}{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=0}^{n} \alpha^r / r!} =$$

$$= \frac{0}{\sum\limits_{r=0}^{\infty} \alpha^r / r!} = \frac{0}{e^{\alpha}} = 0.$$

Таким образом, чем больше линий в пучке, тем вероятность отказа меньше и ближе к нулю. Оба эти свойства показаны графически на рис. 2.

Монотонные показатели упорядоченного пучка линий

В таком пучке все линии пронумерованы и поступающий в СО вызов занимает линию с *наименьшим номером* из числа свободных линий. Рассмотрим частичный пучок длины k, т. е. пучок из первых k линий, где k не превосходит общего числа линий. Вероятность отказа (потери) на этом частичном пучке может быть найдена по формуле для вероятности отказа на пучке из k линий, приведенной: $E_k = (\alpha^k / k!) / \sum\limits_{r=0}^{k} (\alpha^r / r!)$. При удлинении частичного пучка, как отмечено, она уменьшается ($E_k \downarrow$, $k = 1, 2, 3, ...$).

Докажем монотонное убывание показателей эффективности функционирования упорядоченного пучка, описанных ниже.

1. Поток вызовов, поступающий на каждую следующую линию упорядоченного пучка, постепенно редеет, т. е. становится менее интенсивным.

Это видно из формулы для интенсивности потока, поступающего на k-ю линию: $\mu_k = \lambda E_{k-1}$ ($\mu_k \downarrow$, ибо $E_k \downarrow$).

2. С увеличением номера линии поступающий на нее поток (хотя он редеет) более полно обслуживается.

Полнота обслуживания оценивается с помощью коэффициента обслуживания, который для линии k вычисляется по формуле $k^{(k)}_{\text{обсл}} = 1 - \Pi_k$, где Π_k есть вероятность отказа (потери) вызова на линии k при условии, что вызов поступил на нее ($\Pi_k = E_k / E_{k-1}$). Из этой формулы видим, для доказательства того, что $k^{(k)}_{\text{обсл}} \uparrow$, достаточно показать, что $\Pi_k \downarrow$ ($k = 1, 2, 3, ...$), т. е. $\Pi_k / \Pi_{k+1} > 1$ ($k = 1, 2, 3, ...$). Сделаем это. Преобразуем левую часть этого неравенства:

$$\frac{\Pi_k}{\Pi_{k+1}} = \frac{E_k / E_{k-1}}{E_{k+1} / E_k} = \frac{E_k^2}{E_{k-1} E_{k+1}} =$$

$$= \frac{\alpha^{2k} / (k!)^2}{\dfrac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} \dfrac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}} \cdot \frac{S_{k-1} S_{k+1}}{S_k^2} = \frac{k+1}{k} \frac{S_{k-1} S_{k+1}}{S_k^2}.$$

Тогда доказываемое неравенство равносильно следующему неравенству:

$$(k+1) \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha^r}{r!} \sum_{r=0}^{k+1} \frac{\alpha^r}{r!} > k \left(\sum_{r=0}^{k} \frac{\alpha^r}{r!} \right)^2 .$$

Его левая и правая части являются многочленами степени $2k$ относительно α ($\alpha > 0$). Тогда для доказательства справедливости неравенства достаточно показать, что коэффициент при любой степени α (т. е. при σ^s $s = 0 : 2k$) у многочлена в левой части неравенства не меньше (и хотя бы при одной степени строго больше) коэффициента при той же степени α у многочлена в правой части неравенства:

$$(k+1) \sum_{i=(s-k-1)^+}^{\min(s,\, k-1)} \frac{1}{i!(s-i)!} \geq$$
$$\geq \sum_{i=(s-k)^+}^{\min(s,\, k)} \frac{1}{i!(s-i)!} \quad (s = 0 : 2k) \qquad (1)$$

(символ x^+ означает max $(0, x)$).

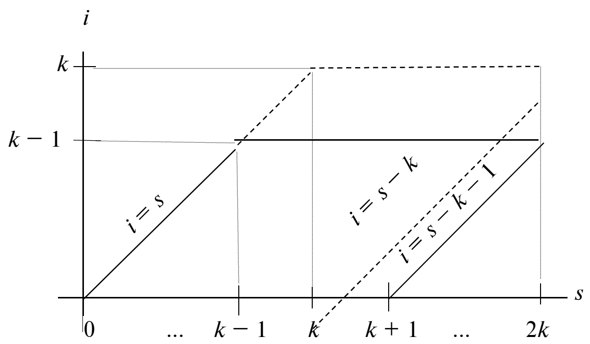

Рис. 3. Пределы суммирования в неравенствах (1)

Нижний и верхний пределы суммирования по i (кусочно-линейные функции от s) обеих сумм в формуле (1) показаны на рис. 3 (сплошным и пунктирным контурами обоих соответствующих параллелограммов).

На рис. 3 показано, что интервал изменения индекса s ($s = 0{:}\ 2k$) целесообразно разбить на три интервала $0 : k - 1$; k; $k + 1 : 2k$ (второй из них является одноточечным), в которых пределы суммирования (по i) являются уже линейными функциями (от s). Тогда для доказательства неравенств (1) достаточно показать их выполнение во всех этих трех интервалах. Соответствующие три частных вида неравенств (1) с линейными пределами суммирования приведены в табл. 1, которые и докажем.

В случае 1 указанное неравенство очевидно выполняется.

В случае 2, исключив в обеих частях доказываемого неравенства имеющуюся в них одинаковую величину $k\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!(k-i)!}$, получим, что оно равносильно неравенству $\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!(k-i)!} \ge \frac{1}{(k-1)!}$ (его левая часть равна $\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k-1)!}+\ldots$), которое очевидно выполняется.

В случае 3, исключив в обеих частях доказываемого неравенства имеющуюся в них одинаковую величину $k\sum_{i=s-k}^{k-1}\frac{1}{i!(s-i)!}$, получим, что оно равносильно неравенству $(k+1)\frac{1}{(s-k-1)!(k+1)!}+\sum_{i=s-k}^{k-1}\frac{1}{i!(s-i)!} \ge$ $\ge k\frac{1}{k!(s-k)!}$, которое после простых преобразований примет вид $\sum_{i=s-k}^{k-1}\frac{1}{i!(s-i)!} \ge \frac{2k-s}{k!(s-k)!}$ или, после домножения его обеих частей на $s!$, вид $\sum_{(i=s-k)}^{(k-1)} C_s^i \ge (2k-s)C_s^k$. Это неравенство выполняется, ибо в сумме в его левой части количество слагаемых равно $2k - s$ и для них справедлива оценка снизу $C_s^i \ge C_s^k$ ($i = s - k : k - 1$), которая вытекает из известного свойства биномиальных коэффициентов: они сначала растут, потом убывают (т. е. располагаются на вогнутой параболе) и поэтому все они не меньше первого из них C_s^{s-k}, а следовательно и равного ему (по свойству сочетаний) C_c^k.

Таблица 1

Случай	s	Частный вид неравенств (1)
1	$0{:}\ k-1$	$(k+1)\sum_{i=0}^{s}\frac{1}{i!(s-i)!} > k\sum_{i=0}^{s}\frac{1}{i!(s-i)!}$
2	k	$(k+1)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!(k-i)!} \ge k\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}$
3	$k+1{:}\ 2k$	$(k+1)\sum_{i=s-k-1}^{k-1}\frac{1}{i!(s-i)!} \ge k\sum_{i=s-k}^{k}\frac{1}{i!(s-i)!}$

3. Легко видеть, что вероятность обслуживания на линии k равна $E_{k-1} - E_k$ ($k = 1, 2, 3, ...$). Можно доказать, что она монотонно убывает по меньшей мере, для первых двух линий упорядоченного пучка: $1 - E_1 > E_1 - E_2 > E_2 - E_3$. Ввиду громоздкости выкладок доказательство этих неравенств здесь не приводится. (Для большего количества линий доказать утверждение пока не удается и, следовательно, в этом случае вопрос остается открытым.)

Монотонные показатели систем с ожиданием

В таких СО вызов, заставший все линии занятыми, становится в очередь. Докажем монотонность показателей эффективности их функционирования при увеличении количества линий в СО ($n = 1, 2, 3, ...$), описанных ниже.

1. Вероятность застать все линии свободными (простаивающими), т. е. вероятность нулевого состояния СО ($p_0^{(n)} = \left(\sum_{r=0}^{n-1} \alpha^r / r! + \alpha^n / (n-1)!(n-\alpha)\right)^{-1}$, $n = 1, 2, 3, ...$), есть монотонно возрастающая (↑) числовая последовательность. (Возрастание в начале этой последовательности очевидно: $p_0^{(1)} = 1 - \alpha < p_0^{(2)} = (2-\alpha)/(2+\alpha)$). Для сравнения вспомним, что в СО с отказом, монотонность была противоположной, т. е. убывающей (см. рис. 1).

Доказываемая монотонность равносильна выполнению неравенства $p_0^{(n+1)} > p_0^{(n)}$, т. е., в явном виде, неравенства

$$\sum_{r=0}^{n-1} \alpha^r / r! + \alpha^n / (n-1)!(n-\alpha) >$$

$$> \sum_{r=0}^{n} \alpha^r / r! + \alpha^{n+1} / n!(n+1-\alpha) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Исключив в обеих частях этого неравенства имеющуюся в них одинаковую величину $\sum_{r=0}^{n-1} (\alpha^r / r!)$, после простых преобразований его можно привести к следующему равноценному неравенству $(1 - \alpha / n)^{-1} > [1 - \alpha / (n+1)]^{-1}$, которое очевидно выполняется.

Заметим, что для рассматриваемой последовательности очевидно выполняется и такое свойство: $p_0^{(n)} \to e^{-\alpha}$ при $n \to \infty$.

Оба свойства показаны графически на рис. 4.

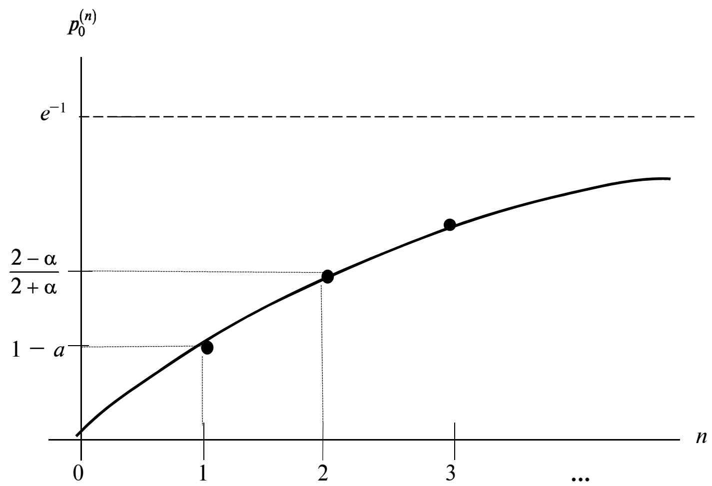

Рис. 4. Монотонное возрастание вероятности простоя всех линий в системах с ожиданием простоя всех линий

2. Вероятность стоять в очереди, а следовательно и занятости всех линий, полной загрузки СО, т. е. числовая последовательность $\Pi_n = p_n / \left[1-(\alpha / n)\right]$, n = 1, 2, 3, ... (где p_n выражается через $p_0^{(n)}$ по формуле p_n = $=(\alpha^n / n!) p_o^{(n)})$, монотонно убывает (↓).

Действительно, доказываемая монотонность равносильна выполнению неравенства $\Pi_{n+1} < \Pi_n$ (n = 1, 2, 3, ...). Последовательно подставляя в него выражения из двух предыдущих формул и производя упрощения, а также подставляя указанную выше формулу для $p_0^{(n)}$, получим следующие его равноценные виды:

$$\frac{p_{n+1}}{1-\dfrac{\alpha}{n+1}} < \frac{p_n}{1-\dfrac{\alpha}{n}}; \quad \frac{\dfrac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} p_0^{(n+1)}}{1-\dfrac{\alpha}{n+1}} < \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!} p_0^{(n)}}{1-\dfrac{\alpha}{n}};$$

$$\alpha(n-\alpha) p_0^{(n+1)} < n(n+1-\alpha) p_0^{(n)};$$

$$\alpha(n-\alpha)\left(\sum_{r=0}^{n-1} \frac{\alpha^r}{r!} + \frac{\alpha^n}{(n-1)!(n-\alpha)}\right) <$$

$$< n(n+1-\alpha)\left(\sum_{r=0}^{n} \frac{\alpha^r}{r!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n+1-\alpha)}\right);$$

$$\alpha(n-\alpha)\sum_{r=0}^{n-1} \frac{\alpha^r}{r!} < n(n+1-\alpha)\sum_{r=0}^{n} \frac{\alpha^r}{r!}.$$

Последнее же неравенство выполняется, ибо в его левой части меньше, чем в правой, и количество слагаемых (все они положительны), фигурирующих в суммах, и коэффициент перед суммой ($\alpha(n-\alpha) < n(n+1-\alpha)$, ибо разность правой и левой частей этого неравенства положительна: $0 < (n-\alpha)^2 + n$).

3. Среднее времени ожидания обслуживания (стояния в очереди), т. е. числовая последовательность $(E\gamma)_n = \Pi_n / (n\beta - \lambda)$, n = 1, 2, 3, ..., монотонно убывает (↓).

Действительно, доказываемая монотонность равносильна выполнению неравенства $(E\gamma)_{n+1} < (E\gamma)_n$, т. е., в явном виде, неравенства $\dfrac{\Pi_{n+1}}{(n+1)\beta-\lambda} < \dfrac{\Pi_n}{n\beta-\lambda}$ (n = 1, 2, 3, ...).

Оно же выполняется, ибо у дроби в его левой части числитель меньше (согласно предыдущему п. 2), а знаменатель больше, чем у дроби в его правой части.

4. Среднее время пребывания вызова в СО, т. е. числовая последовательность $(E\delta)_n$ = $=(E\gamma)_n + E\nu = \Pi_n / (n\beta - \lambda) + 1/\beta$, $n = 1, 2, 3, ...$, монотонно убывает (↓).

Действительно, $(E\delta)_n$ ↓, ибо $(E\gamma)_n$ ↓ (согласно предыдущему п. 3), а $E\nu$ = const.

5. Средняя длина очереди, т. е. числовая последовательность $(E\eta)_n = \lambda(E\gamma)_n$, n = 1, 2, 3, ..., монотонно убывает (↓).

Действительно, $(E\eta)_n$↓, ибо $(E\gamma)_n$↓ (согласно п. 3), а $\lambda > 0$.

6. Среднее число вызовов в СО (среднее состояние СО), т. е. числовая последовательность $(E\upsilon)_n = \lambda(E\delta)_n$, n = 1, 2, 3, ..., монотонно убывает (↓).

Действительно, $(E\upsilon)_n$↓, ибо $(E\delta)_n$↓ (согласно п. 4), а $\lambda > 0$.

Монотонные показатели замкнутых систем

Для замкнутых СО известны следующие дополнительные (т. е. помимо указанных выше) исходные данные, допущения и правила функционирования:

m – количество обслуживаемых объектов ($n < m < \infty$); δ – время непрерывной работы объекта (т. е. до его поломки). Оно предполагается распределенным по показательному закону с параметром λ: $P\{\delta > t\} = e^{-\lambda t}$. По-прежнему имеем: $\alpha = \lambda/\beta$ – нагрузка СО. В момент поломки объект поступает в СО. Если все линии оказываются занятыми, то он становится в очередь. Отремонтированный объект покидает СО. Он начинает функционировать и в будущем опять ломается, следовательно, вновь поступает в СО. Таким образом, в этих СО входящий поток формируется из выходящего.

Докажем монотонность показателей эффективности функционирования СО рассматриваемого типа, описанных ниже.

1. В замкнутых однолинейных (n = 1) СО при увеличении количества обслуживаемых объектов (m = 1, 2, 3, ...) коэффициент простоя – линии (π) – уменьшается, а объекта (в очереди или в СО: $\pi_{оч}$, $\pi_{СО}$) – увеличивается.

Для этих коэффициентов имеем соответственно следующие формулы:

$$\pi = E\xi' / n, \qquad (2)$$

в частности при $n = 1$

$$\pi = E\xi' = p_0 = \left(\sum_{r=0}^{m} A_m^r \alpha^r \right)^{-1}; \qquad (3)$$

$$\pi_{оч} = E / m = 1 - \left(1 + \alpha^{-1}\right)\left(n - E\xi'\right) / m; \qquad (4)$$

$$\pi_{СО} = E / m = 1 - \left(n - E\xi'\right) / m\alpha, \qquad (5)$$

где ξ' – число свободных линий; A_m^r – число размещений из m по r.

а) Монотонное убывание коэффициента простоя линии ($\pi^{(m)}\downarrow$), как видим из формулы (3), означает монотонное убывание вероятности нулевого состояния СО ($p_0^{(m)}\downarrow$). Последняя же монотонность равносильна выполнению неравенства $p_0^{(m+1)} < p_0^{(m)}$, т. е., в явном виде, неравенства $\sum_{r=0}^{m} A_m^r \alpha^r < \sum_{r=0}^{m+1} A_{m+1}^r \alpha^r$ (m = = 1, 2, 3, ...). Выполнение же этого неравенства вытекает из выполнения следующей цепочки неравенств:

$$\sum_{r=0}^{m} A_m^r \alpha^r < \sum_{r=0}^{m} A_{m+1}^r \alpha^r < \sum_{r=0}^{m+1} A_{m+1}^r \alpha^r,$$

в которой первое неравенство выполняется ввиду справедливости (по свойству размещений) неравенства $A_m^r < A_{m+1}^r$, а второе – ввиду увеличения (на единицу) количества слагаемых (положительных).

б) Монотонное возрастание коэффициентов простоя объекта в очереди или в СО ($\pi_{оч}^{(m)}$, $\pi_{СО}^{(m)}\uparrow$), как видим из формул

$$\pi_{оч}^{(m)} = 1 - \frac{(1 + 1/\alpha)(1 - p_0^{(m)})}{m},$$

$$\pi_{СО}^{(m)} = 1 - \frac{1 - p_0^{(m)}}{m\alpha},$$

которые, в свою очередь, получаются из формул (4) и (5) при n = 1, означает монотонное убывание ($\downarrow$) числовой последовательности $(1 - p_0^{(m)}) / m$, т. е. выполнение неравенства $(1 - p_0^{(m+1)}) / (m+1) < (1 - p_0^{(m)}) / m$ (m = 1, 2, 3, ...). Последовательно преобразовывая его и подставляя в него указанное в (3) выражение для $p_0^{(m)}$, получим следующие его равноценные виды:

$$(m+1)\, p_0^{(m)} - m p_0^{(m+1)} < 1;$$

$$(m+1)\left(\sum_{r=0}^{m} A_m^r \alpha^r\right)^{-1} - m\left(\sum_{r=0}^{m+1} A_{m+1}^r \alpha^r\right)^{-1} < 1;$$

$$(m+1)\sum_{r=0}^{m+1} A_{m+1}^r \alpha^r - m\sum_{r=0}^{m} A_m^r \alpha^r < \sum_{r=0}^{m} A_m^r \alpha^r \sum_{r=0}^{m+1} A_{m+1}^r \alpha^r. \qquad (6)$$

В левой и правой частях неравенства (6) стоят многочлены степени, соответственно, m + 1 и $2m$ + 1 относительно α ($\alpha > 0$). Покажем выполнение следующего достаточного условия его справедливости: коэффициент при любой степени α (т. е. при α^k, k = 0: m + 1) у многочлена в левой части неравенства не больше коэффициента при той же степени α у многочлена в правой части неравенства (строгое неравенство (6) тогда будет обеспечено наличием дополнительных положительных слагаемых у многочлена более высокой степени в правой его части). Все три целесообразных случая для k, соответствующие достаточно очевидные формулы для коэффициентов обоих многочленов и соотношения между этими коэффициентами представлены в табл. 2.

Таблица 2

Случай	k	Вид и соотношение коэффициентов многочленов в неравенстве (6)
1	0	1 = 1
2	1 : m	$(m+1)\, A_{m+1}^k - m\, A_m^k \le \sum_{i=0}^{k} A_m^i A_{m+1}^{k-i}$
3	$m+1$	$(m+1)\, A_{m+1}^{m+1} \le \sum_{i=0}^{m} A_m^i A_{m+1}^{m+1-i}$

В случае 1 указанное равенство очевидно выполняется: свободные члены обоих многочленов одинаковы и равны единице.

В случае 2 для доказательства фигурирующего в нем неравенства покажем выполнение следующего достаточного для него условия: левая его часть равна, а правая не меньше величины $(mk+m+1)A_m^{k-1}$.

$$(m+1)A_{m+1}^k - mA_m^k = (m+1)^2 A_m^{k-1} - m(m-k+1)A_m^{k-1} = (mk+m+1)\times$$
$$\times A_m^{(k-1)}\sum_{i=0}^{k} A_{(m)}^i A_{(m+1)}^{(k-i)} = \sum_{i=0}^{k-1} A_{(m)}^i A_{(m+1)}^{(k-i)} +$$
$$+ A_{(m)}^k \ge \sum_{i=0}^{k-1} A_{(m+1)}^k + A_{(m)}^k = kA_{(m+1)}^k + A_{(m)}^k =$$
$$= k(m+1)A_m^{(k-1)} + (m-k+1)A_m^{(k-1)} =$$
$$= (mk+m+1)A_m^{(k-1)}.$$

В этой цепочке встречающееся неравенство справедливо в силу очевидного неравенства $A_m^i A_{m+1}^{k-i} \ge A_{m+1}^k$, ибо $i<k$.

В случае 3 справедливость фигурирующего в нем неравенства вытекает из следующей оценки снизу его правой части:

$$\sum_{i=0}^{m} A_m^i A_{m+1}^{m+1-i} \ge \sum_{i=0}^{m} A_{m+1}^{m+1} = (m+1)A_{m+1}^{m+1}.$$

В этой цепочке встречающееся неравенство справедливо в силу очевидного неравенства $A_m^i A_{m+1}^{m+1-i} \ge A_{m+1}^{m+1}$, ибо $i < m+1$.

2. Пусть имеются две линии и $2s$ обслуживаемых объектов. Тогда возможны две формы организации многостаночного обслуживания: *индивидуальная*, когда за каждой линией закрепляется обслуживание «своих» s объектов (т. е. имеются две независимые, самостоятельные, тождественные СО: $n = 1$, $m = s$), *бригадная* – обе линии обслуживают все $2s$ объектов (т. е. имеется единая СО: $n = 2$, $m = 2s$).

Покажем, что бригадная форма многостаночного обслуживания лучше индивидуальной в смысле уменьшения всех трех коэффициентов простоя – линии, объекта в очереди или в СО. Соответственно в первой (индивидуальной) и второй (бригадной) форме для коэффициентов простоя будем использовать обозначения с одной и двумя чертами сверху.

а) Для коэффициента простоя линии $\bar{\pi}$ при индивидуальной форме обслуживания имеем, согласно формуле (3), выражение $\bar{\pi} = \left(\sum_{r=0}^{s} A_m^r \alpha^r\right)^{(-1)}$. Покажем, что при бригадной форме для этого коэффициента имеем формулу

$$\bar{\bar{\pi}} = \frac{1+s\alpha}{1+2\sum_{r=1}^{2s} A_{2s}^r (\alpha/2)^r}. \qquad (7)$$

Действительно, используя формулу (2), выражение p_1 через p_0 и выражение для p_0 в случае $n = 2$, имеем следующую цепочку равенств:

$$\bar{\bar{\pi}} = E\xi'/2 = (2p_0 + p_1)/2 = (2p_0 + m\alpha p_0)/2 =$$
$$= (2p_0 + 2s\alpha p_0)/2 = (1+s\alpha)p_0 =$$
$$= \frac{1+s\alpha}{1+2\sum_{r=1}^{2s} A_{2s}^r (\alpha/2)^2}.$$

Покажем справедливость доказываемого неравенства $\bar{\bar{\pi}} < \bar{\pi}$. Подставляя в него предыдущие явные выражения и преобразовывая их, получим следующие его равноценные виды:

$$\frac{1+s\alpha}{1+2\sum_{r=1}^{2s} A_{2s}^r (\alpha/2)^r} < \frac{1}{\sum_{r=0}^{s} A_s^r \alpha^r};$$

$$(1+s\alpha)\sum_{r=0}^{s} A_s^r \alpha^r < 1+2\sum_{r=1}^{2s} A_{2s}^r (\alpha/2)^r. \qquad (8)$$

В левой и правой частях неравенства (8) стоят многочлены степени, соответственно $s+1$ и $2s$ относительно α ($\alpha > 0$). Покажем выполнение следующего достаточного условия его справедливости: коэффициент при любой степени α (т. е. при α^k, $k = 0$: $s+1$) у многочлена в левой части неравенства не больше коэффициента при той же степени α у многочлена в правой части неравенства (строгое неравенство (8) тогда будет обеспечено наличием дополнительных положительных слагаемых у многочлена более высокой степени в правой его части). Все три целесообразных случая для k, соответствующие достаточно очевидные формулы для коэффициентов обоих многочленов и соотношения между этими коэффициентами представлены в табл. 3.

Таблица 3

Случай	k	Вид и соотношение коэффициентов многочленов в неравенстве (8)
1	0	1 = 1
2	1 : s	$A_s^k + sA_s^{k-1} \le A_{2s}^k / 2^{k-1}$
3	s + 1	$sA_s^s \le A_{2s}^{s+1} / 2^s$

В случае 1 указанное равенство очевидно выполняется: свободные члены обоих многочленов одинаковы и равны по единице.

В случае 2 преобразуем левую и правую части фигурирующего в нем неравенства:

$$A_s^k + sA_s^{k-1} = A_s^{k-1}(s-k+1) + sA_s^{k-1} = \\ = (2s-k+1)A_s^{k-1};$$

$$A_{2s}^k / 2^{k-1} = A_{2s}^{k-1}(2s-k+1) / 2^{k-1}.$$

После сокращения обеих частей на общий множитель $2s - k + 1$ неравенство примет вид $2^{k-1}A_s^{k-1} \le A_{2s}^{k-1}$ или, в другой записи, $\prod_{i=0}^{k-2} 2(s-i) \le \prod_{i=0}^{k-2}(2s-i)$, которое является уже очевидным (сомножители произведения в левой части неравенства не превосходят сомножителей в правой его части).

В случае 3 после сокращения обеих частей фигурирующего в нем неравенства на общий множитель s оно примет вид $2^s A_s^s \le A_{2s}^s$ или, в другой записи, $\prod_{i=0}^{s-1} 2(s-i) \le \prod_{i=0}^{s-1}(2s-i)$, которое является уже очевидным (сомножители произведения в левой части неравенства не превосходят сомножителей в правой его части).

б) Выразим коэффициент простоя объекта в очереди или в СО (формулы (4) и (5) для $\pi_{оч}$, $\pi_{СО}$) через коэффициент простоя линии (π):

$$\pi_{оч} = 1 - \frac{(1+\alpha^{-1})(1-E\xi'/n)}{m/n} = 1 - \frac{(1+\alpha^{-1})(1-\pi)}{m/n};$$

$$\pi_{СО} = 1 - \frac{1-E\xi'/n}{\alpha m/n} = 1 - \frac{1-\pi}{\alpha m/n}.$$

Так как в рассматриваемом случае отношение m/n является одинаковым для обоих вариантов, то подставляя его значение s в эти формулы, получим следующий их вид для обоих вариантов:

$$\bar{\bar{\pi}}_{оч} = 1 - \frac{(1+\alpha^{-1})(1-\bar{\pi})}{s},$$

$$\bar{\bar{\pi}}_{оч} = 1 - \frac{(1+\alpha^{-1})(1-\bar{\bar{\pi}})}{s};$$

$$\bar{\bar{\pi}}_{СО} = 1 - \frac{1-\bar{\pi}}{s\alpha}, \quad \bar{\bar{\pi}}_{СО} = 1 - \frac{1-\bar{\bar{\pi}}}{s\alpha}.$$

Отсюда и видна справедливость доказываемых неравенств: $\bar{\bar{\pi}}_{оч} < \bar{\pi}_{оч}$, $\bar{\bar{\pi}}_{СО} < \bar{\pi}_{СО}$, ибо, как показано в п. а), $\bar{\bar{\pi}} < \bar{\pi}$.

3. Покажем, что для получившейся в п. 2 бригады (СО с параметрами, $n = 2$, $m = 2s$) целесообразно ее аналогичное укрупнение (присоединение к ней СО с параметрами $n = 1$, $m = s$), т. е. целесообразно объединить в одну не только две (это показано в п. 2), но и три тождественных СО с параметрами $n = 1$, $m = s$. Именно покажем, что для СО с параметрами $n = 3$, $m = 3s$ все три коэффициента простоя – линии, объекта в очереди или в СО – меньше, чем для СО с параметрами $n = 2$, $m = 2s$ (а следовательно, меньше, с учетом результата в предыдущем п. 2, чем для СО с параметрами $n = 1$, $m = s$). Соответственно в первой и второй (укрупненной) СО для коэффициентов простоя будем использовать обозначения с одной и двумя чертами сверху.

Для коэффициента простоя линии $\bar{\pi}$ выше уже было получено выражение, см. формулу (7). Для коэффициента простоя линии $\bar{\pi}$, используя формулу (2), выражения p_1

и p_2 через p_0 и выражение для p_0 в случае $n = 3$, имеем следующую цепочку равенств:

$$\bar{\bar{\pi}} = \frac{E\xi'}{3} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,p_k}{3} = \frac{3p_0 + 2p_1 + p_2}{3} =$$
$$= \frac{3p_0 + 2m\alpha p_0 + m\alpha(m-1)2^{-1}\alpha p_0}{3} =$$
$$= \frac{3 + 6s\alpha + 3s(3s-1)2^{-1}\alpha^2}{3}\,p_0 =$$
$$= \frac{2 + 4s\alpha + s(3s-1)\alpha^2}{2}\,p_0 =$$
$$= \frac{2 + 4s\alpha + s(3s-1)\alpha^2}{2\left(1 + 3s\alpha + 9/2\sum_{r=2}^{3s} A_{3s}^r(\alpha/3)^r\right)} =$$
$$= \frac{2 + 4s\alpha + s(3s-1)\alpha^2}{2 + 6s\alpha + 9\sum_{r=2}^{3s} A_{3s}^r(\alpha/3)^r}.$$

Покажем справедливость доказываемого неравенства $\bar{\bar{\pi}} = \bar{\pi}$. Подставляя в него предыдущие явные выражения и преобразовывая их, получим следующие его равноценные виды:

$$\frac{2 + 4s\alpha + s(3s-1)\alpha^2}{2 + 6s\alpha + 9\sum_{r=2}^{3s} A_{3s}^r(\alpha/3)^r} < \frac{1 + s\alpha}{1 + 2\sum_{r=1}^{2s} A_{2s}^r(\alpha/2)^r};$$

$$\left[2 + 4s\alpha + s(3s-1)\alpha^2\right]\left[1 + 2\sum_{r=1}^{2s} A_{2s}^r(\alpha/2)^r\right] <$$
$$< \left[2 + 6s\alpha + 9\sum_{r=2}^{3s} A_{3s}^r(\alpha/3)^r\right]. \qquad (9)$$

В левой и правой частях неравенства (9) стоят многочлены степени, соответственно $2s + 2$ и $3s + 1$ относительно α ($\alpha > 0$). Покажем выполнение следующего достаточного условия его справедливости: коэффициент при любой степени α (т. е. при α^k, $k = 0$: $2s + 2$) у многочлена в левой части неравенства не больше (а при некоторых степенях строго меньше) коэффициента при той же степени α у многочлена в правой части неравенства (строгое неравенство (9) будет обеспечено также наличием при $s > 1$ дополнительных положительных слагаемых у многочлена более высокой степени в правой его части). Все шесть целесообразных случаев для k, соответствующие достаточно очевидные формулы для коэффициентов обоих многочленов и соотношения между этими коэффициентами представлены в табл. 4.

В случае 1 указанное равенство очевидно выполняется: свободные члены обоих многочленов одинаковы (равны 2).

В случае 2 коэффициенты тоже одинаковы (равны $8s$).

В случае 3 указанное равенство выполняется (оба коэффициента равны $3s(5s-1)$).

В случае 4 преобразовываем доказываемое неравенство:

$$\frac{A_{2s}^{k-2}}{2^{k-2}}[(2s-k+2)(2s-k+1) +$$
$$+ 4s(2s-k+2) + 2s(3s-1)] \le$$
$$\le \frac{A_{3s-1}^{k-2}}{3^{k-2}}[3s(3s-k+1) + 9s^2];$$

$$3^{k-2}A_{2s}^{k-2}(18s^2 - 8sk + 12s + k^2 - 3k + 2) \le$$
$$\le 2^{k-2}A_{3s-1}^{k-2}3s(6s-k+1).$$

Таблица 4

Случай	k	Вид и соотношение коэффициентов многочленов в неравенстве (9)
1	0	$2 = 2$
2	1	$2A_{2s}^1 + 4s = 6s + 2s$
3	2	$A_{2s}^2 + 4sA_{2s}^1 + s(3s-1) = A_{3s}^2 + 6s^2$
4	$3 : 2s$	$\frac{A_{2s}^k}{2^{k-2}} + 4s\frac{A_{2s}^{k-1}}{2^{k-2}} + s(3s-1)\frac{A_{2s}^{k-2}}{2^{k-3}} \le \frac{A_{3s}^k}{3^{k-2}} + s\frac{A_{3s}^{k-1}}{3^{k-3}}$
5	$2s + 1$	$4sA_{2s}^{2s}/2^{2s-1} + s(3s-1)A_{2s}^{2s-1}/2^{2s-2} \le A_{3s}^{2s+1}/3^{2s-1} + sA_{3s}^{2s}/3^{2s-2}$
6	$2s + 2$	$s(3s-1)A_{2s}^{2s}/2^{2s-1} \le A_{3s}^{2s+2}/3^{2s} + sA_{3s}^{2s+1}/3^{2s-1}$

Делим на 6*s*:

$$3^{k-3}A_{2s-1}^{k-3}(18s^2-8sk+12s+k^2-3k+2)\le \le 2^{k-3}A_{3s-2}^{k-3}(3s-1)(6s-k+1). \quad (10)$$

При $k = 3$ неравенство (10) выполняется, ибо оно превращается в равенство: обе его части равны $2(3s-1)^2$.

При $k = 4$ неравенство (10) принимает вид

$$3(2s-1)2\left(9s^2-10s+3\right)\le \le 2(3s-2)(3s-1)3(2s-1)$$

или, после сокращения, $9s^2-10s+3\le 9s^2-5s+2$, т. е. $5s \ge 1$, которое, как и (10), выполняется даже как строгое, ибо $s \ge 1$.

При $k \ge 5$ запишем неравенство (10) в виде

$$3(2s-1)3^{k-4}A_{2s-2}^{k-4}(18s^2-8sk+12s+k^2-3k+2)\le \le 2(3s-1)2^{k-4}A_{3s-3}^{k-4}(3s-2)(6s-k+1).$$

Левую и правую части этого неравенства будем рассматривать как произведение трех сгруппированных сомножителей (см. ниже) и докажем неравенство между соответствующими (по порядку в произведении) сомножителями, что очевидно достаточно для доказательства справедливости доказываемого неравенства.

Для первой пары сомножителей имеем очевидное неравенство

$$3(2s-1)<2(3s-1).$$

Для второй пары имеем неравенство $3^{k-4}A_{2s-2}^{k-4}\le 2^{k-4}A_{3s-3}^{k-4}$, т. е. неравенство $\prod_{i=2}^{k-3}3(2s-i)\le\prod_{i=2}^{k-3}2(3s-1-i)$, которое выполняется, ибо для сомножителей фигурирующих в нем произведений выполняется неравенство $3(2s-i)\le 2(3s-1-i)$ ввиду выполнения условия $i \ge 2$.

Для оставшихся сомножителей покажем выполнение для рассматриваемых значений k ($k \in [5, 2s]$) неравенства

$$18s^2-8sk+12s+k^2-3k+2< <(3s-2)(6s-k+1),$$

т. е., после преобразования, неравенства $k^2-5(s+1)k+21s+4<0$.

Так как квадратный трехчлен в левой части этого неравенства имеет положительный дискриминант ($D=25(s+1)^2-84s-16=25s^2-34s+9=(25s-9)(s-1)>0$ при $s > 1$), то он имеет два вещественных корня k_1 и k_2 и, следовательно, принимает отрицательные значения при $k \in (k_1, k_2)$. Проверим: $[5, 2s] \in [k_1, k_2]$, что является очевидно достаточным для выполнения доказываемого неравенства.

$$k_1=\frac{5(s+1)-\sqrt{(25s-9)(s-1)}}{2}< <\frac{5(s+1)-\sqrt{25(s-1)^2}}{2}=5;$$

$$k_2=\frac{5(s+1)+\sqrt{(25s-9)(s-1)}}{2}>2s.$$

В случае 5 преобразовываем доказываемое неравенство:

$$\frac{s(3s+1)(2s)!}{2^{2s-2}}\le\frac{4sA_{3s}^{2s}}{3^{2s-1}};$$

$$3^{2s-1}(3s+1)(2s)!\le 2^{2s}A_{3s}^{2s};$$

$$3(3s+1)9^{s-1}s!\le 4^sA_{3s}^{s}. \quad (11)$$

При $s = 1$ неравенство (11) выполняется как равенство: обе его части равны 12.

При $s = 2$ неравенство (11) реализуется как строгое: 378 < 480.

При $s \ge 3$ запишем неравенство (11) в виде (после сокращения на 6):

$$9(3s+1)\prod_{i=1}^{s-2}9(i+2)<8s(3s-1)\prod_{i=1}^{s-2}4(2s+i).$$

Левую и правую части этого неравенства будем рассматривать как произведение двух сгруппированных сомножителей (см. ниже) и докажем неравенство между соответствующими (по порядку в произведении) сомножителями, что очевидно достаточно для доказательства справедливости доказываемого неравенства.

Для первой пары сомножителей покажем выполнение для рассматриваемых значений s ($s \geq 3$) неравенства $9(3s+1) < 8s(3s-1)$, т. е., после преобразования, неравенства $24s^2 - 35s - 9 > 0$.

Так как квадратный трехчлен в левой части этого неравенства имеет положительный дискриминант ($D = 2089$), он имеет два вещественных корня s_1 и s_2 ($s_1 > s_2$, $s_1 = (35 + \sqrt{2089}) / 48 \approx 5/3$) и принимает положительные значения даже при $s > s_1$, а следовательно, и при $s \geq 3$.

Для второй пары сомножителей докажем неравенство $\prod_{i=1}^{s-2} 9(i+2) < \prod_{i=1}^{s-2} 4(2s+i)$. Для этого покажем выполнение следующего достаточного условия: для сомножителей фигурирующих в нем произведений выполняется неравенство $9(i+2) < 4(2s+i)$, т. е. неравенство $5i + 18 < 8s$:

$$5i + 18 \leq 5(s-2) + 18 = 5s + 8 < 8s.$$

В этой цепочке первое неравенство – не строгое, имеет место, ибо $i \leq s - 2$, а последнее – строгое, т. е. неравенство $3s > 8$, ввиду выполнения неравенства $s \geq 3$.

В случае 6 запишем правую часть доказываемого неравенства в виде $(4s-1)A_{3s}^{2s+1}$ и преобразуем получившееся неравенство:

$$s(3s-1)3^{2s}(2s)! \leq (4s-1)2^{2s-1}A_{3s}^{2s+1}.$$

Разложим на следующие множители обе его части:

$$s(3s-1)3 \cdot 3^{2s-1} 2sA_{2s-1}^{s-1} s! \leq$$
$$\leq (4s-1)2 \cdot 2^{2s-2} s3s(3s-1)A_{3s-2}^{s-1} A_{2s-1}^{s-1}.$$

Сократив обе части этого неравенства на величину $6s^2(3s-1)A_{2s-1}^{s-1}$, получим неравенство:

$$3 \cdot 9^{s-1} s! \leq (4s-1)4^{s-1} A_{3s-2}^{s-1}. \qquad (12)$$

При $s = 1$ неравенство (12) выполняется как равенство: обе его части равны 3.

При $s = 2$ неравенство (12) реализуется как строгое: $54 < 112$.

В случае $s \geq 3$ запишем неравенство (12) в виде

$$3\prod_{i=0}^{s-2} 9(i+2) < (4s-1)\prod_{i=0}^{s-2} 4(2s+i).$$

Левую и правую части этого неравенства будем рассматривать как произведение двух сгруппированных сомножителей (см. ниже) и докажем неравенство между соответствующими (по порядку в произведении) сомножителями, что очевидно достаточно для доказательства справедливости доказываемого неравенства.

Для первой пары сомножителей имеем: $3 < 4s - 1$, ибо $s > 1$.

Для второй пары сомножителей докажем неравенство

$$\prod_{i=0}^{s-2} 9(i+2) < \prod_{i=0}^{s-2} 4(2s+i).$$

Для этого покажем выполнение следующего достаточного условия: для сомножителей фигурирующих в нем произведений выполняется неравенство $9(i+2) < 4(2s+i)$, т. е. неравенство $5i + 18 < 8s$:

$$5i + 18 \leq 5(s-2) + 18 = 5s + 8 < 8s.$$

В этой цепочке первое неравенство – не строгое, имеет место, ибо $i \leq s - 2$, а последнее – строгое, т. е. неравенство $3s > 8$, ввиду выполнения неравенства $s \geq 3$.

Так как в рассматриваемом случае отношение m/n является одинаковым для обоих вариантов (как и в рассмотренном п. 2), то уменьшение коэффициентов простоя объекта в очереди или в СО при сравнении двух рассматриваемых вариантов СО ($\bar{\bar{\pi}}_{\text{оч}} < \bar{\pi}_{\text{оч}}$, $\bar{\bar{\pi}}_{\text{со}} < \pi_{\text{со}}$), как показано в п. 2,б, является следствием уменьшения коэффициентов простоя линии ($\bar{\bar{\pi}} < \bar{\pi}$).

В заключение отметим, что здесь рассмотрены только те показатели эффективности СО четырех указанных типов, для которых удалось найти короткое и простое доказательство их монотонности. Совсем не изученными в рассматриваемом случае остаются системы с ограниченной очередью (т. е. такие, в которых вызов, заставший все линии занятыми, ставится в очередь, если только ее длина меньше определенной величины). Для них рассматриваются те же шесть показателей эффективности, что и для СО с ожиданием, но рассчитываемые, естественно, по своим (более сложным и громоздким) формулам. Вопрос об их монотонности остается открытым.

Отметим, что для некоторых показателей монотонность является интуитивно ясной, но доказать ее пока не удалось и, следовательно, они остаются лишь «подозрительными на монотонность».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хинчин, А.Я**. Работы по математической ТМО [Текст] / А.Я. Хинчин. Изд. 2-е. М.: Изд-во УРСС, 2004.

2. **Гнеденко, Б.В.** Введение в ТМО [Текст] / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко и др. Изд. 3-е. М.: Ком. Книга, 2005.

3. **Ивницкий, В.А.** Теория сетей массового обслуживания [Текст] / В.А. Ивницкий. М.: Физматлит, 2004.

4. **Бендерская, Е.Н.** Моделирование систем с использованием ТМО [Текст]: учеб. пособие / Е.Н. Бендерская, Д.Н. Колесников и др. СПб.: СПбПУ, 2003.

5. **Тютюкин, В.К.** Установление монотонности показателей эффективности для нахождения оптимального числа линий в системах массового обслуживания [Текст] / В.К. Тютюкин // Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л.В. Канторовича : матер. Междунар. науч. конф. СПб., 2012. С. 174–175.

6. **Тютюкин, В.К.** Монотонные показатели эффективности систем массового обслуживания [Текст] / В.К. Тютюкин // Информационных аспекты экономики : матер. науч.-практ. конф. СПб., 2012. С. 79–82.

REFERENCES

1. **Khinchin A.Ia.** Raboty po matematicheskoi TMO. Izd. 2-e. M.: Izd-vo URSS, 2004. (rus)

2. **Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. i dr.** Vvedenie v TMO. Izd. 3-e. M.: Kom. Kniga, 2005. (rus)

3. **Ivnitskii V.A.** Teoriia setei massovogo obsluzhivaniia. M.: Fizmatlit, 2004. (rus)

4. **Benderskaia E.N., Kolesnikov D.N. i dr.** Modelirovanie sistem s ispol'zovaniem TMO : ucheb. posobie. SPb.: SPbPU, 2003. (rus)

5. **Tiutiukin V.K.** Ustanovlenie monotonnosti pokazatelei effektivnosti dlia nakhozhdeniia optimal'nogo chisla linii v sistemakh massovogo obsluzhivaniia. Matematika, ekonomika, menedzhment: 100 let so dnia rozhdeniia L.V. Kantorovicha : mater. Mezhdunar. nauch. konf.. SPb., 2012. S. 174–175. (rus)

6. **Tiutiukin V.K.** Monotonnye pokazateli effektivnosti sistem massovogo obsluzhivaniia. Informatsionnykh aspekty ekonomiki : mater. nauch.-prakt. konf. SPb., 2012. S. 79–82. (rus)

ТЮТЮКИН Виктор Константинович – профессор кафедры «Экономическая кибернетика» Санкт-Петербургского государственного университета, доктор экономических наук, профессор.

191123, ул. Чайковского, д. 62, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: vktutukin@mail.ru

TUTUKIN Viktor K. – St. Petersburg State University.

191123, Chaikovskogo str. 62, St. Petersburg, Russia. E-mail: VKTutukin@mail.ru